目　　录

绪　论…… 1

§ 1　航空外弹道学研究的对象及其任务…… 1
§ 2　基本内容…… 2
§ 3　基本术语、定义及符号…… 3

第一篇　航空外弹道学的基本问题和求解方法

第一章　作用于弹丸上的诸力…… 6

§ 1　弹丸质心运动向量方程式…… 6
§ 2　推力和推力加速度…… 7
§ 3　重力和重力加速度…… 9
§ 4　哥氏加速度……10
§ 5　空气阻力和阻力加速度……10

第二章　弹丸质心运动方程式的组成……25

§ 1　外弹道学基本问题的假设……25
§ 2　质心运动方程式的组成……25
§ 3　空气弹道的一般特性……34

第三章　航空外弹道的数值计算法……40

§ 1　引　言……40
§ 2　插值与曲线拟合……40
§ 3　差 分 法……55
　一、差分法的数学基础……56
　二、用差分法解弹道方程……80
§ 4　龙格—库塔法…… 104
　一、龙格—库塔法的数学基础…… 104
　二、计算举例…… 107
　三、误差的估算…… 109
　四、解弹道方程组…… 110
§ 5　阿当姆斯法…… 115

一、阿当姆斯内插公式…… 116
二、阿当姆斯外推公式…… 117
三、估计误差的一种方法…… 117
四、计算举例…… 118

第四章　航空外弹道的近似求解…… 120

§ 1　斜角坐标系射击弹道的近似求解…… 120
§ 2　火箭弹道的近似求解…… 129
§ 3　直角小抬高角坐标系射击弹道的近似求解…… 145
§ 4　斜角坐标系射击弹道的直接解析式求解…… 155
§ 5　轰炸弹道的有关问题及近似求解…… 162
一、引　言…… 162
二、无风轰炸弹道图…… 163
三、表征航空炸弹的弹道特征数…… 164
四、弹形系数 i 变化时和炸弹直径、重量不标准时，C、Θ的变化…… 166
五、气象条件不标准时，对轰炸弹道的影响及其修正…… 167
六、标准落下时间、投弹高度和空速改变时，对弹道诸元的影响…… 170
七、轰炸弹道的近似求解…… 171

第二篇　飞行稳定性理论

第五章　旋转稳定理论…… 177

§ 1　引　言…… 177
§ 2　作用在旋转弹丸上的力和力矩…… 180
§ 3　在弹道直线段上，弹丸绕质心的旋转运动…… 186
§ 4　在弹道曲线段上，弹丸绕质心的旋转运动…… 193
§ 5　绕质心转动对质心运动的影响…… 197
一、周期性摆动对射程及散布的影响…… 197
二、偏流现象…… 198
三、在活动炮塔上向侧方射击时的侧射效应…… 199

第六章　摆动稳定理论…… 207

§ 1　引　言…… 207
§ 2　作用在尾翼式弹丸上的力和力矩…… 209
§ 3　摆动运动方程式的组成及其通解…… 214
§ 4　通解攻角和偏角的性质及影响偏角的因素…… 223
§ 5　摆动运动方程式的特解—推力偏心产生的攻角和偏角…… 228
§ 6　无推力尾翼式弹丸的摆动运动…… 231
§ 7　尾翼弹丸的散布、减少散布的措施及稳定飞行的条件…… 237

第三篇　弹道表的编制及应用电子计算机进行弹道计算的程序设计

第七章　弹道表的编制…… 242

§ 1　引　言…… 242
§ 2　风洞吹风试验求弹丸的空气动力参数…… 243
§ 3　射击试验…… 247
一、试验前的准备…… 247
二、弹丸的炮口初速度 V_0 及其中间偏差的测定 …… 248
三、弹道系数和射击密集度的测定…… 252
四、翻转力矩（或尾翼弹的稳定力矩）特征数的测定…… 256
五、尾翼弹丸赤道阻尼力矩系数导数和升力系数导数的测定及二心距 h 的计算…… 259
§ 4　航空外弹道表的编制…… 260
一、外弹道表的种类与要求…… 260
二、外弹道表的内容与格式等编制问题…… 262
三、外弹道表的使用…… 266
四、现代空战的特点及给弹道计算带来的新问题…… 269

第八章　应用电子计算机进行弹道计算的程序设计…… 274

§ 1　引　言…… 274
§ 2　空中射击弹道计算的 FORTRAN 程序设计…… 274
§ 3　轰炸弹道计算的 FORTRAN 程序设计…… 285

附　录…… 301

一、各物理量符号表…… 301
二、附表…… 304

参考文献…… 314

绪　论

§ 1　航空外弹道学研究的对象及其任务

自从出现了用火药发射的武器（即枪炮）以后，首先需要解决的问题就是如何使由枪炮发射出去的弹丸准确命中目标。为解决这一问题，就需了解弹丸在枪炮管中（即在火药气体作用下）及出枪炮管后在空中的运动规律。

研究投掷弹丸运动的科学，总称为弹道学。

自十九世纪六十年代起，把研究火药气体作用下的弹丸在枪（炮）管中的运动，称之为“内弹道学”。把研究弹丸飞出枪（炮）管后在空中的运动规律称为“外弹道学”。

现在，可定义外弹道学为：研究关于未加操纵的各种弹丸①在空中运动的科学。而从飞机上发射或投放各种弹丸的运动的科学，就称为“航空外弹道学”。

弹丸的运动可以区分为质心运动和围绕质心运动两部分。前者主要解决弹道计算问题，后者主要解决飞行稳定性及射弹散布的计算与分析问题。所谓飞行稳定性，就是弹丸受到外界因素的干扰作用，引起了运动状态的变化；当干扰去掉之后，弹丸能够自身恢复到既定运动状态的能力。对无控弹丸，保证飞行稳定性的基本条件，就是要求弹轴与速度矢量之间的夹角数值，限制在额定范围之内，以使弹轴在全弹道上能大致与速度方向一致。外弹道学将具体建立保证飞行稳定性的条件，并寻求飞行不稳定的原因所在。这不仅需要借助于外弹道学理论进行分析，而且还需必要的外弹道试验手段。

无控弹丸的散布较大，保证飞行稳定性是减小散布的一个必要条件。保持飞行稳定性的方法，不外乎装设尾翼或是高速旋转，即尾翼法和旋转法。为了研究尾翼弹丸和旋转弹丸稳定性问题而分别建立和发展起来的所谓摆动理论和旋转理论，为弹丸在空中飞行稳定、减小散布等问题创造了越来越有利的条件。

对弹丸的弹道计算，必须确定一定的条件，如气象条件、地理条件和弹丸本身的条件。目前弹道计算多是采用电子计算机进行，可以得到较准确的结果。而近似的解析计算便于分析各种因素间的相互关系，在估算时也比较方便，故其重要性也是不可忽视的。

综上所述，外弹道学的主要任务为：

根据已知数据计算弹道，或根据给定的战术技术要求决定弹丸的弹道特性；研究飞行稳定性，计算散布和寻求减小散布的途径；研究一些专门课题，如射击弹道表、轰炸弹道表等。

航空外弹道学具有一般外弹道学的共性，其特性主要表现在空对空射击时的小抬高角（为命中目标，武器所置方向与炮口、目标间连线之间的夹角）和空对地投掷弹丸的特定情

① 这里的“弹丸”泛指为各类无控制的炮弹、枪弹、火箭弹、炸弹及空投鱼雷等。

况。

在航空军械中无论用炮弹、炸弹或火箭弹都要求既快且准的命中目标。现代飞机具有高空高速性能，空战中两机相遇时间相应地缩短很多，而间隔距离在加大，因而只有加大有效作用距离才能更好地发挥武器的作用。这就要求一方面从军械设计方面来改进；另一方面从弹道学观点来改进军械设备，提高命中率也是十分重要的一环，如提高弹道计算准确度以提高命中率。另外，利用弹道学知识可以提出各种航空军械设计中的各种必要数据。所以，航空外弹道学是航空火力控制专业的一门专业基础课，它为航空火力控制原理和航空火力控制系统等专业课提供必要的基础知识，并在设计航空火力控制系统中实际运用这一知识。

§2 基本内容

外弹道学既是研究弹丸在空气中的运动规律，因而我们首先要研究作用在弹丸上的诸力，这就是第一章内容。再根据受力列出运动方程，从而对运动规律进行讨论。

弹丸本身是一轴对称体，它在空气中运动时由于各种因素影响，其空气阻力合力作用点（或称阻力中心）不与质量中心相重合，因而弹丸运动实际上是一空间刚体运动问题。所以，直接讨论这种运动规律是非常复杂的。然而，实际弹道学是已解决弹丸飞行中稳定性问题的，即弹丸在空气中运动时，实际作用在弹丸上的空气阻力的方向与弹轴的方向近似一致，也就是说弹丸在运动时，弹轴 ξ 方向与速度向量 V 方向之间夹角 δ（称章动角或攻角）很小（如图 0-1），因而弹道学中通常以 $\delta=0$ 的情况下（如图 0-2）来讨论和研究弹丸的运动规律。很显然，它是一共点受力系的问题，其作用力都通过质心，实际上也就是讨论弹丸质心的运动规律问题。这就是第二章内容。

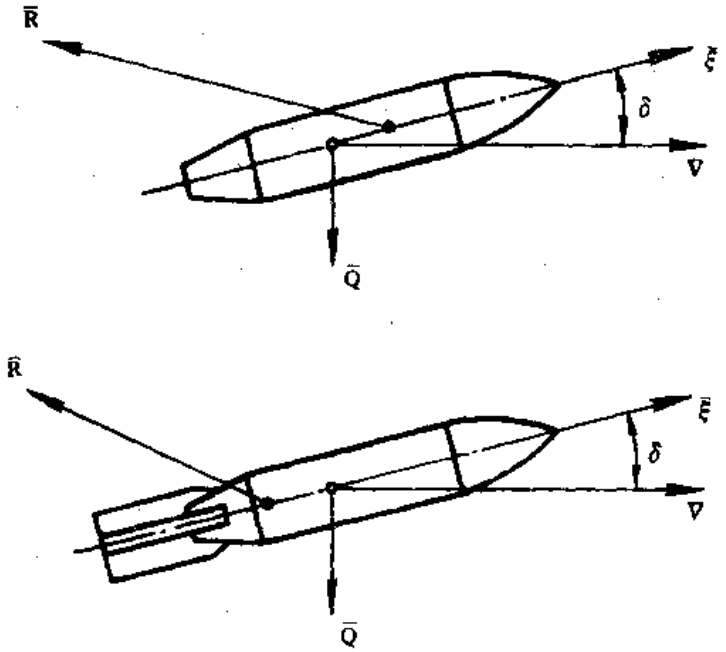


图 0-1 有章动角 δ 的情况

第三章讨论了航空外弹道的数值计算方法。在这基础上具体叙述了航空外弹道的解法，叙述了空中射击弹道、轰炸弹道和火箭弹弹道的近似解法，这就是第四章的内容。

当有 δ 角存在时，其弹丸的运动规律以及随之所产生的一些现象，这就是第五、六两章所讲述的旋转理论、摆动理论以及讨论围绕质心运动对质心运动影响的内容。

第七章介绍了弹道表的编制与弹道的设计。最后第八章特别补充了应用电子计算机进行弹道计算的程序设计。作为全书的结尾。

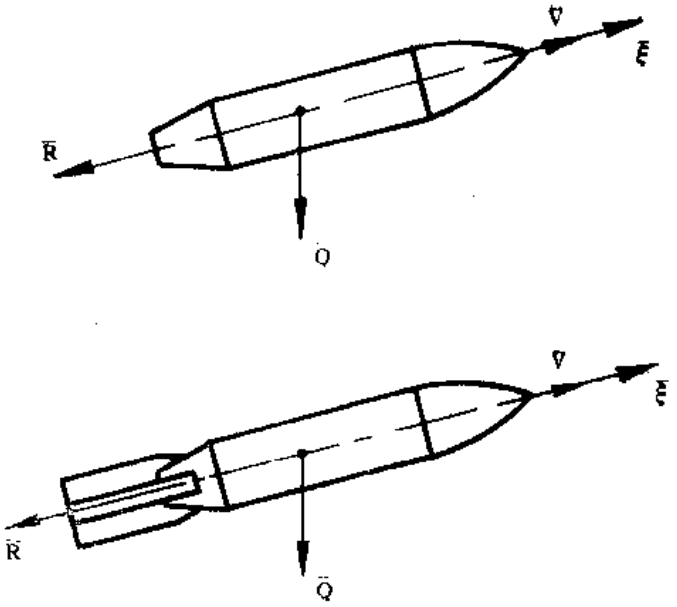


图 0-2 $\delta=0$ 的情况

§ 3 基本术语、定义及符号

射出点——弹丸出炮口的某一短距离内，火药气体继续对弹丸作用使其加速。这就是后效作用期。在火药气体对弹丸作用结束时，弹丸的质心位置称为射出点。由于后效作用距离较短（一般只有炮口口径的 25～30 倍，通常近似地取炮口中心作为射出点。射出点是计算弹道的起始点，一般用 O 表示。

炮口水平面——通过射出点（即炮口中心）的水平面。如图 0-3 中的 xoz 平面所示。

射击面——通过初速矢量线的铅直面。外弹道学基本问题中所研究的弹丸质心轨迹是始终位于射击面内的平面轨迹，如图 0-3 中，射击面 xoy 内的虚线所示。实际弹道常偏离射击面，如图中实线所示。

坐标系——为研究弹丸质心在空中的运动，常采取与地球固联的以炮口中心为原点的右手直角坐标系。水平轴 ox 为射击面与炮口水平面的交线，顺射向为正；铅直轴 oy 在射击面内，指向上方并与水平轴 ox 相垂直；oz 轴垂直于射击面，按右手法则决定其正向。

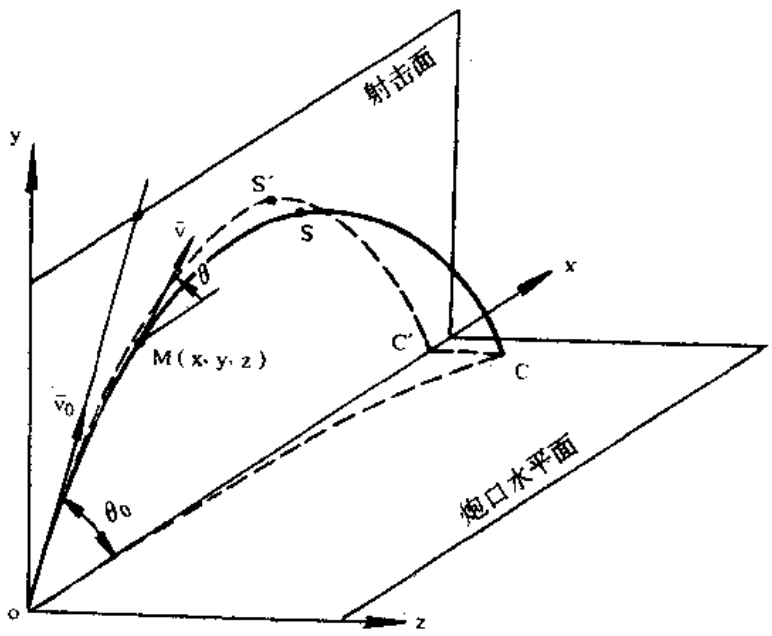


图 0-3 射击面和炮口水平面图

这就是地面坐标系，如图 0-3 所示。

弹道顶点——全弹道的最高点，以 S 表示之。自弹道顶点至炮口水平面的铅直距离，称弹道顶点高，以 y_S 表示。

弹道落点——弹丸从炮口飞出后，再回到炮口水平面上的一点，以 C 表示。

升弧和降弧——自射出点 O 至弹道顶点 S 的弹道弧段，叫升弧，即 $\overset{\frown}{OS}$；自顶点 S 到落点 C 的弹道弧段，叫降弧，即 $\overset{\frown}{SC}$。

弹道诸元——表示弹丸飞离射出点 t 秒后，所到达空间任意点的坐标 (x,y,z) 和该点的速度矢量 $\bar{v}$ 的大小 v 与方向倾角 θ，称为弹道诸元。在射出点 O、顶点 S 和落点 C 的诸元，分别称为射出点诸元、顶点诸元和落点诸元，并分别用下标“0”“S”和“C”区别之。

对某些重要诸元，常赋与专门术语。如 $x_c=X$ 称为全水平射程，简称射程；v_c 称为落速；$|\theta_c|$ 称为落角；$t_0=T$，称全飞行时间。θ_0 是弹丸飞离炮口瞬间的速度矢量线与炮口水平面之间的夹角，称为射角，而 v_0 称为初速。

初速向量 $\bar{v}_0$ 的方向通常认为就是炮管的轴线方向。其大小则与实际弹丸离炮口瞬间的速度 v_g 有所区别。这是由于弹丸在后效作用期内继续受火药气体的作用而加速，到后效期末达到最大值 v_m。此后弹丸才只受空气阻力和重力两个力的作用而减速运动，如图 0-4 所示。

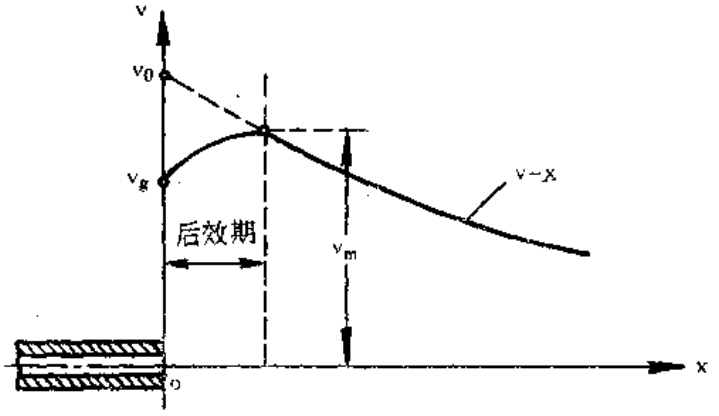


图 0-4　弹丸初速度图

由于对后效期间火药气体的压力和速度变化规律的研究尚欠彻底，无法用理论公式或经验公式准确地进行计算；又后效期作用时间较短，对整个弹道的影响不大，故在实用上，常假设弹丸一出炮口仅受空气阻力和重力两个力的作用，好像后效期根本不存在一样。为修正由于上述假设所造成的误差，而采取一个虚拟的初速 v_0，以代替实际的炮口速度 v_g。这个初速在数值上不仅比炮口速度 v_g 大，而且也比最大速度 v_m 大。因为采用这个虚拟初速，在空气阻力和重力作用下，到后效期末由外弹道理论公式算出的速度，应该恰与在该瞬间弹丸的真实速度大小相等。用这样的方法所确定的那个虚拟的初速，就是我们通常作为计算弹道所用的初速 v_0。图 0-4 中所示的虚线部分，表示在后效期，由假想的初速 v_0 在空气阻力和重力作用下用理论公式所算出的速度逐渐减小变化的情况。

在航空军械中，使用不同武器时，初速向量又有不同。如使用轰炸武器，则一般炸弹的初速向量 $\bar{v}_0$ 就与投弹瞬间飞机的速度向量 $\bar{v}_1$ 相一致。空中射击时，初速向量除了与弹丸飞离炮口时的初速 $\bar{v}_0$ 有关，而且还与飞机飞行速度 $\bar{v}_1$ 及炮在飞机上的按装位置、相对角度有关。因而初速向量 $\bar{v}_{01}$ 应是炮轴方向的 $\bar{v}_0$ 与飞机飞行速度向量 $\bar{v}_1$ 的向量和（如图 0-5 所示），按下式计算：

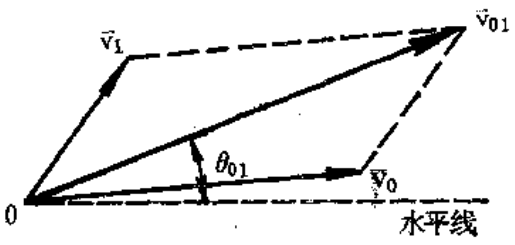


图 0-5　初速度向量的 $\bar{v}_{01}$ 合成

$$\bar{v}_{01}=\bar{v}_{0}+\bar{v}_{1}\ 。$$

而初始射角 θ_{01} 则为 $\bar{v}_{01}$ 与水平线间之夹角。

在应用直角坐标系讨论弹丸运动时，坐标原点 O 取在射击高度 H 的弹丸射出点，xoy 平面取为过初速向量 $\bar{v}_{01}$ 的铅直面（称为射击面），xoz 平面则取为射击高度 H 上的水平面，因而 $\bar{v}_{01}$ 与 ox 轴间夹角为初始射角 θ_{01}（如图 0-6）。

当目标（点 C）不与射击点在同一高度时（如图 0-7），OC 连线称为目标线，OC 与水平线间夹角称为高低角 ε。初速向量 $\bar{v}_{01}$ 延长线称为射线，射线与目标线间夹角称为抬高角 α。显然此时初始射角 θ_{01} 应为

$$\theta_{01}=\alpha+\varepsilon\ 。$$

在解射击弹道、轰炸弹道等不同问题时，使用了不同坐标系，这将在以后讨论中说明。

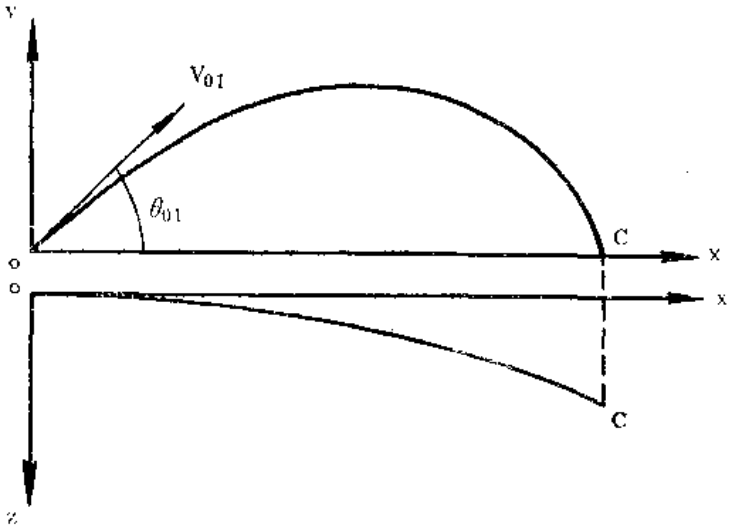


图 0-6　直角坐标系图

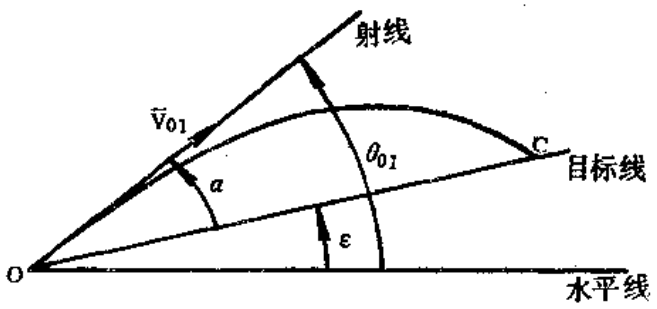


图 0—7　射线及目标线关系图

第一篇　航空外弹道学的基本问题和求解方法

第一章　作用于弹丸上的诸力

§ 1　弹丸质心运动向量方程式

弹丸作为力学对象，它在空中的运动属于刚体的一般运动。其运动可分为质心运动与围绕质心运动两部分。针对弹丸运动的特点，在保证稳定运动的前提下，围绕质心运动对质心运动的影响是次要的；也就是说，弹丸绕心旋转运动考虑与否，对其运动不会带来明显的差别。因此，根据力学中“质点”的含义，研究弹丸质心运动时，就把弹丸的运动，当做质点的运动来研究。

运用牛顿运动定律时，所采用的参考系是惯性系。以太阳为原点的参考系，以指向任一恒星的直线为坐标轴，则所观察到的无数天文现象与牛顿运动定律相符，这个参考系可作为惯性系。凡相对于惯性系作匀速直线运动的参考系也就是惯性系。由于地球中心相对太阳来说，其运动加速度很小，因而在研究弹丸运动时，通常把地球中心作为惯性系的原点，其三轴指向宇宙中的恒星，这个不随地球自转的坐标系，就作为研究弹丸运动及其他机械运动的惯性系。

根据牛顿第二定律，在惯性参考系中绝对加速度 $\bar{j}$ 与外力间的关系为

$$m\bar{j}=\Sigma\bar{F}_i。\tag{1-1}$$

式中：$\bar{j}$—绝对加速度；

m—弹丸质量；

$\bar{F}_i$—作用于弹丸上的力。

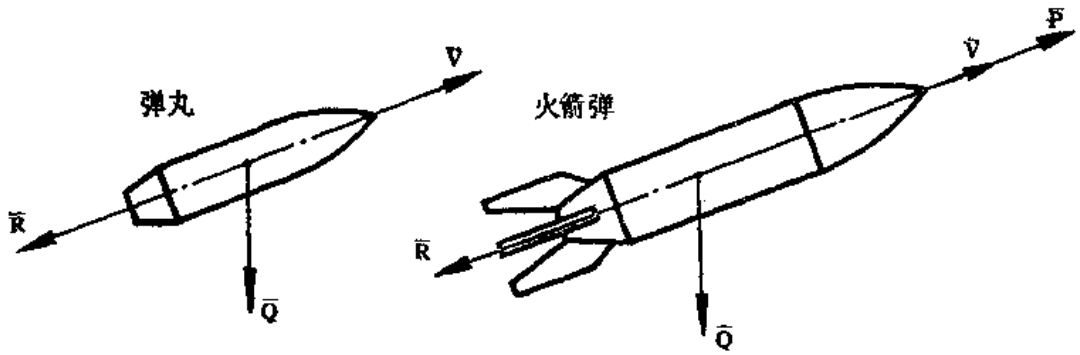


图 1-1　作用在弹丸上的外力

对火箭弹来说，作用在火箭弹弹丸上的外力有推力P，空气阻力R和引力Q。设其相应的加速度为$\bar{a}$、$\bar{J}$和$\bar{G}$，即推力加速度$a=\frac{P}{m}$，空气阻力加速度$J=\frac{R}{m}$，引力加速度$G=\frac{Q}{m}$。将(1-1)式两边除以m，并将上述加速度代入，则得绝对加速度为

$$\bar{\jmath}=\bar{a}+\bar{J}+\bar{G}\ 。 \tag{1-2}$$

我们是在地球表面上研究弹丸运动，也就是研究弹丸相对地球坐标系的运动。而地球是一个椭球体，除绕极轴自转外，还绕太阳公转。但两者相比可以忽略公转，因而研究弹丸运动，是在一个定轴转动的参考系中。由理论力学知，在这参考系中绝对加速度可以表示成下式

$$\bar{\jmath}=\bar{\jmath}_r+\bar{\jmath}_e+\bar{\jmath}_c\ 。 \tag{1-3}$$

式中：$\bar{\jmath}_r$—相对加速度，以$\bar{V}$表示相对速度时，则

$$\bar{\jmath}_r=\frac{d\bar{V}}{dt};$$

$\bar{\jmath}_e$—牵连加速度，即地球表面那点的向心加速度；

$\bar{\jmath}_c$—哥氏加速度。

因而讨论相对加速度时，其运动方程式可列为

$$\bar{\jmath}_r=\frac{d\bar{V}}{dt}=\bar{\jmath}-\bar{\jmath}_e-\bar{\jmath}_c\ 。$$

将(1-2)式代入则得

$$\frac{d\bar{V}}{dt}=\bar{a}+\bar{J}+\bar{G}-\bar{\jmath}_e-\bar{\jmath}_c\ 。$$

令

$$\bar{g}=\bar{G}-\bar{\jmath}_e \tag{1-4}$$

$\bar{g}$称为重力加速度，则得火箭弹质心运动向量方程式：

$$\frac{d\bar{V}}{dt}=\bar{a}+\bar{J}+\bar{g}-\bar{\jmath}_c\ 。 \tag{1-5}$$

若为一般弹丸，则$\bar{a}=0$，因而一般弹丸的质心运动向量方程式为

$$\frac{d\bar{V}}{dt}=\bar{J}+\bar{g}-\bar{\jmath}_c\ 。 \tag{1-6}$$

§ 2　推力和推力加速度

推力的产生主要是藉助于由火箭发动机喷管高速流出的气体而获得，因而推力大小我们可按动量守恒定律来求得。在求推力公式之前，先对火药火箭弹的一般构造作一简单介绍。

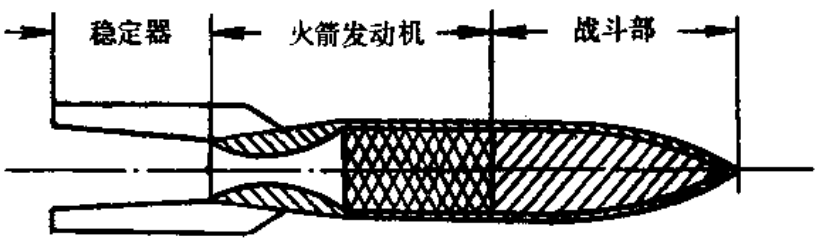


图 1-2　火箭弹构造简图

火药火箭弹一般分为三大部分（图 1-2），即战斗部（包括引信及炸药装药等）、火箭发动机（包括喷管、燃烧室及火药装药等）以及稳定器三部分。发射前，火箭弹的总重量以 q_0 表示，它应包括火药装药重量 ω 以及战斗部重量和燃烧室、喷管、稳定器等重量，而除火药装药重量 ω 外，其他部分的重量和，通常称为被动段的总重量，用 q_k 表示。因而其关系为

$$q_0 = \omega + q_k \text{。} \tag{1-7}$$

在火药燃烧过程中（即火箭弹主动段上），火箭弹重量是在变化的，任一瞬间的重量以 q 表示。下面我们来求推力公式（讨论中假定气体流动为定常运动）。

设在 t 瞬间，火箭的质量为 $m = q/g$，速度为 v，火药气体相对弹体的排气速度为 u，则此时所具有的动量为 mv，如图 1-3 (a)。经过 dt 时间后，火药速度增为 $v+dv$，质量减为 $m-|dm|$，即喷出气体的质量为 $|dm|$，喷出气体相对地球坐标系的速度为 $(v+dv-u)$，则此时的动量为

$$(m-|dm|)(v+dv)+|dm|\cdot(v+dv-u) \text{。}$$

如图 1-3(b)。

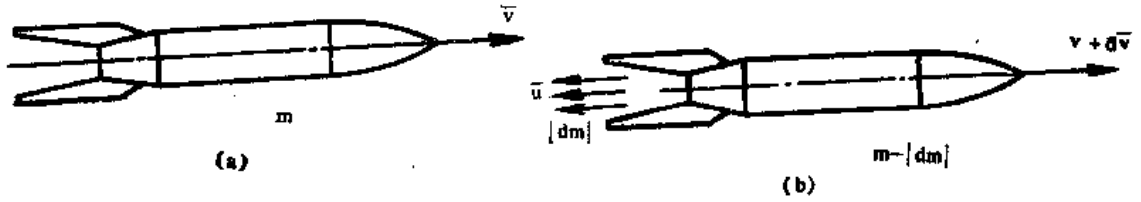


图 1-3　用动量守恒定理求火箭弹推力加速度
（a）t 时刻，　　（b）$t+dt$ 时刻

根据动量守恒原理，则

$$mv = (m-|dm|)(v+dv)+|dm|(v+dv-u),$$

整理得

$$m\,dv = u|dm| \text{。}$$

以 $|dm| = |\dot{m}|dt$ 代入得

$$\frac{dv}{dt} = \frac{|\dot{m}|}{m}u \text{。}$$

由于 dv/dt 是由喷气作用而产生的加速度，因而称之为推力加速度。实际上推力加速度 a 除由上述气体流动而产生的部分外，还与气流在喷口端面处的压力 P_a 和外界压力 P_y，之差值有关，即所谓静压差。这部分作用力为

$$(P_a - P_y)\sigma_a \text{。}$$

其中，σ_a 为喷口断面的面积，故总推力应为

$$P = |\dot{m}|u + (P_a - P_y)\sigma_a \text{。} \tag{1-8}$$

而推力加速度

$$a = \frac{|\dot{m}|}{m}u + \frac{P_a - P_y}{m}\sigma_a \text{。} \tag{1-9}$$

(1-8) 式又常写成

$$P = |\dot{m}|\cdot u_e \text{。} \tag{1-10}$$

则 (1-9) 又可写成

$$a=\frac{|\dot{m}|}{m}u_e \tag{1-11}$$

式中，$u_e=u+\frac{P_a-P_y}{|\dot{m}|}\sigma_a$ 称为有效排气速度。其值主要由火箭发射药性质及喷管结构来确定。一般约为 1800～2200 公尺/秒，平均值可取 2000 公尺/秒。$|\dot{m}|$称为质量消耗率，其大小则与火箭发动机设计有关。由（1-11）式可以看出：要提高推力加速度 a，可由提高质量消耗率$|\dot{m}|$及提高火箭发射药的有效排气速度 u_e 着手，而这两部分都要在火箭发动机设计及火箭装药合理选择中来提高。

§ 3　重力和重力加速度

任何抛射体的运动均受到重力的作用。所谓重力就是我们通常用弹簧秤秤量物体的重量。设抛射体的质量为 m，重量为 q，根据牛顿运动第二定律，由重力所产生的重力加速度 g 为

$$g=\frac{q}{m}$$

由于重力是地心引力和因地球自转（角速度$\Omega=7.292\times10^{-5}$弧度/秒）而产生的惯性离心力的合力。因此，重力加速度 $\bar{g}$ 必然是引力加速度 $\bar{G}$ 及惯性离心加速度$(-\bar{j}_e)(j_e=\Omega^2R\cos\lambda$，$R$为地球半径，$\lambda$ 为地理纬度）的矢量和（图 1-4），即为 §1 中所述的（1-4）式

$$\bar{g}=\bar{G}-\bar{j}_e$$

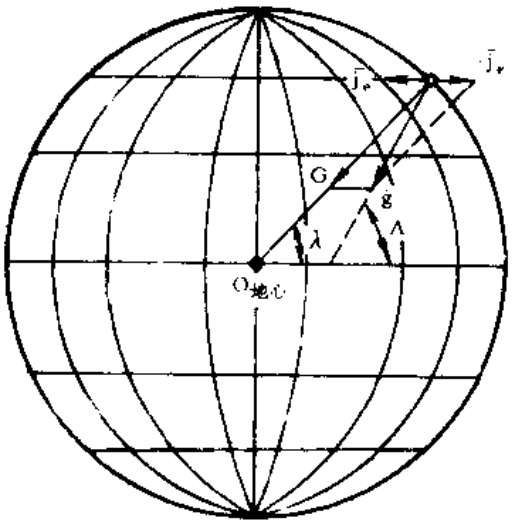


图 1-4　重力加速度 g 的求解图

由图 1-4 中几何关系，可求得重力加速度 g 与引力加速度G 及纬度间的关系式

$$g=G\left[1-\frac{2\Omega^2R}{G}\cos^2\lambda+\left(\frac{\Omega^2R}{G}\right)^2\cos^2\lambda\right]^{\frac{1}{2}}$$

式中，$\frac{\Omega^2R}{G}$的数量级为3×10^{-3}，则$\left(\frac{\Omega^2R}{G}\right)^2$的数量级为 9×10^{-6}，所以 $\left(\frac{\Omega^2R}{G}\right)^2$ 项与 $\frac{\Omega^2R}{G}$ 项相比较可以忽略不计。应用二项式定理展开后，只取$\frac{\Omega^2R}{G}$项，则得

$$g=G-\Omega^2R\cos^2\lambda$$

所以重力与重力加速度随纬度 λ 的变化略有变化。两极与赤道之间，最大实际相差0.05米/秒^2，因而对一般射程不很大的弹道来说，重力和重力加速度可以近似看成常数。

由于惯性离心力与引力相比甚小，故重力性质主要与引力性质相同。而引力大小与弹丸距地心距离 $r(=R+y)$ 的平方成反比（图 1-5），因此，重力加速度也应与地

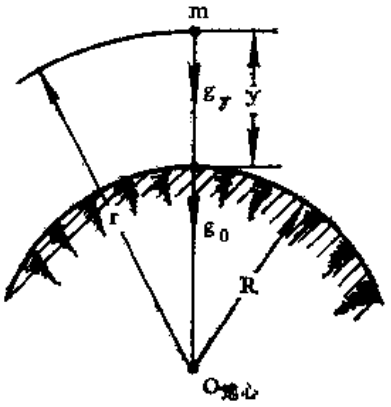


图 1-5　重力加速度 g 随高度 y 的变化图

心距离 r 的平方成反比，严格的说，重力加速度在不同高度上也有所不同。重力加速度与高度 y 的近似公式为

$$g = g_0\left(\frac{R}{R+y}\right)^2 \approx g_0\left(1-\frac{2y}{R}\right) \tag{1-12}$$

式中：g_0—地面重力加速度值；

g—距地面为 y 处的重力加速度值。

但由于一般弹道高与地球半径 R 相比很小，故重力加速度在全弹道中的变化也很小，可以忽略。如当 $y=32$ 公里时，$g|_{y=32\text{公里}}=0.99g_0$，也就是说，当弹道高达 32 公里时，重力加速度仅减小 1 %。何况航空弹道的弹道高最大的轰炸弹道只有 20 公里左右，而较小的射击弹道只有几公里，故对航空弹道来说，重力加速度可以近似看成为一常数，在我国大陆范围内，其平均值为 9.80 米/秒²。故在我国炮兵中常取（因而炮射弹道计算时也取此值）

$$g=9.80 \text{ 米/秒}^2。 \tag{1-13}$$

而轰炸弹道计算中常取

$$g=9.806 \text{ 米/秒}^2。$$

且其方向总是看成为垂直于当地的水平面，即在射程不很大的情况下重力场可看成是恒定不变的，即 $\bar{g}$ 为常向量。

§ 4 哥氏加速度

由理论力学知，哥氏加速度 $\bar{j}_c$ 按下式计算

$$\bar{j}_c = 2\bar{\Omega}\times\bar{v}。$$

其大小为

$$j_c = 2\Omega v\sin(\bar{\Omega},\bar{v}),$$

而 $\sin(\bar{\Omega},\bar{v})$ 最大值为 1，当以 $v=1350$ 米/秒代入得

$$j_c = 2\times 7.292\times 10^{-5}\times 1.35\times 10^3 = 1.97\times 10^{-1} \text{ 米/秒}^2$$

此时 $j_c/g=2\%$。

因此，在射程不大的情况下，可以将哥氏加速度 j_c 忽略不计。

火箭弹质心运动向量方程可写成

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}+\bar{J}+\bar{g} \tag{1-15}$$

一般弹丸质心运动向量方程式则为

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{J}+\bar{g}。 \tag{1-16}$$

§ 5 空气阻力和阻力加速度

弹丸在空气中运动，其间存在相对运动。具有相对运动的弹丸与空气之间的相互作用力，就是一般所说的空气阻力。

由于空气阻力是由弹丸在大气中运动而产生的，因此，首先需要介绍一下有关大气方面的知识，然后再来研究空气对弹丸的作用，即空气阻力。

一、大气的知识

1. 大气构成

包围着地球周围的空气叫大气。大气的密度随距地球表面高度的增加而迅速减小，即愈近地面，空气密度愈大，愈远则愈小。距地面6.5公里处的空气密度约为地面的1/2；10公里处约为1/3；30公里处约为1/60。

在大气的下层（即接近地面的大气层）由于地面的热幅射而产生气温随高度增大而下降。空气发生着铅直方向的对流，这层叫对流层，其一般高度为10公里左右。在这一层，几乎集中了3/4的空气。

在对流层以上，有处于热平衡状态的同温层，温度变化极小，空气也没有上下对流，只有水平移动，故又称平流层。

在对流层与同温层之间并没有明显的界限，大致有1至2公里的过渡层存在，这层叫亚同温层。

由物理学知道，理想气体的气温、气压和比容间的关系，也即干燥空气的状态方程为

$$PV = RT, \tag{1-17}$$

或

$$\gamma = \frac{P}{RT}。 \tag{1-18}$$

式中：P—气压(公斤/米^2)；

V—比容(米^3/公斤)；

γ—空气比重(公斤/米^3)，$\gamma = \rho g$，ρ为空气密度；

T—绝对温度(°K)，$T = 273 + t$，t为摄氏温度(℃)；

R—气体常数，对于空气而言，$R = 29.27$米/度。

由于炮兵与航空中测量气压通常以公厘汞柱为单位，利用一个大气压等于10333公斤/公尺^2，或等于760公厘汞柱的关系，则

$$P(\text{公斤/公}^2\text{尺}) = \frac{10333}{760} h\ (\text{公厘汞柱}),$$

即

$$P = 13.6h。$$

这样得到干空气的状态方程为

$$\gamma = \frac{13.6h}{RT}。 \tag{1-19}$$

由于实际空气中常含有水蒸气，不是纯干空气。下面推导湿空气的状态方程。

假定气压为h的湿空气中，水蒸气的分压为e，那么干空气的分压为$(h-e)$。这样对于干空气部分，根据(1-19)式，其比重为

$$\gamma_1 = \frac{13.6}{RT}(h-e) \tag{1-20}$$

对水蒸气部分，参照(1-19)式，其重度为

$$\gamma_2 = \frac{13.6}{R_2T}e \tag{1-21}$$

由于水蒸气的气体常数 $R_2=8R/5$，代入（1-21）式并与（1-20）式相加，得湿空气的比重为

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2=\frac{13.6h}{RT}\left(1-\frac{3}{8}\cdot\frac{e}{h}\right)。$$

若令

$$\tau=\frac{T}{1-\frac{3}{8}\cdot\frac{e}{h}}，\qquad (1\text{-}22)$$

称为虚拟温度，即以 τ 代替实际湿空气的温度 T，那么，湿空气的状态方程在形式上就与纯干空气的状态方程完全相同，即

$$\gamma=\frac{13.6h}{R\tau}，\qquad (1\text{-}23)$$

这就是大气状态方程。

虚拟温度实际上是不存在的，可以把它理解为在有水蒸气存在下的真实气温的修正值。其意义是：具有与湿空气相同比重，相同压强时干空气的温度。在引入虚拟温度后，无论干空气或湿空气，其气体状态方程的形式相似。当完全为干空气时，$e=0$，$\tau=T$，则(1-23)式与（1-19）式完全相同，所以（1-23）式更具有一般性。今后在外弹道学中所指气温，均系指虚拟温度而言。

2. 气体状态与空间位置到地面的高度 y 密切相关，下面将研究这种变化规律。研究是在大气铅直平衡这一假设条件下进行的。即认为作用于某一定体积空气上的诸力处于平衡状态。

设在高度 y 处取厚度为 dy，上下底面积均为 S 的空气柱(如图 1-6)，其重量为 $\gamma S dy$，方向向下，高度 y 处压强为 $13.6h$，作用在该空气柱下底面积的总力为 $13.6hS$，方向向上；在高度 $y+dy$ 处压强为 $13.6(h+dh)$，故作用于底面的总力为 $13.6(h+dh)S$，方向向下。当此空气柱在铅直方向处于平衡状态时，则作用于此空气柱的诸力的和必等于零，即

$$-13.6(h+dh)s+13.6hs-\gamma s dy=0。$$

或

$$13.6\,dh=-\gamma dy。$$

将（1-23）式代入上式，得

$$13.6\,dh=-13.6\frac{h}{R\tau}dy。$$

或

$$\frac{dh}{h}=-\frac{1}{R}\frac{dy}{\tau}。\qquad (1\text{-}24)$$

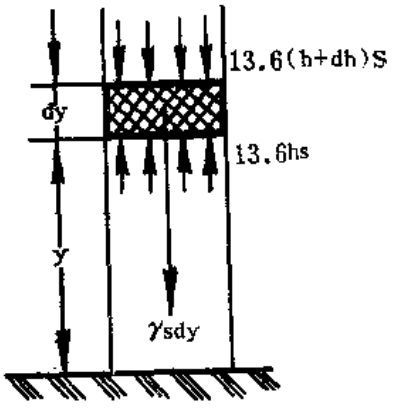


图 1-6 压强 h 随高度 y 的变化图

将上式在 $y=0$ 到 y 和 $h=h_0$ 到 h 的界限内积分，便可得到气压与高度的关系为

$$\ln\frac{h}{h_0}=-\frac{1}{R}\int_0^y\frac{dy}{\tau}。$$

或

$$\frac{h}{h_0}=e^{-\frac{1}{R}\int_0^y\frac{dy}{\tau}}。\qquad (1\text{-}25)$$

式中，h_0—地面气压值。因而在任意高度 y 处的气压 h，由地面气压 h_0 及气温随高度的变化

规律来确定。只要知道了虚拟温度 τ 与高度 y 的函数关系，立即可以求得气压 h 在一定的地面值 h_0 时，与高度 y 的函数关系。

在对流层里，气温随高度增加而降低，且空气的冷热和胀缩过程，一般是接近瞬时进行的，可以近似看作为绝热过程，即满足绝热方程

$$PV^K = P_0 V_0^K \text{ 。}$$

或

$$h\gamma^{-K} = h_0\gamma_0^{-K} \text{ 。}$$

将(1-23)式代入上式，消去比重 γ 得

$$h^{1-K}\tau^K = = h_0^{1-K}\tau_0^K \text{ 。} \qquad (1\text{-}26)$$

式中：K—绝热指数，对于空气 $K = C_P/C_V = 1.40$；

C_P—定压比热；

C_V—定容比热。

对(1-26)式两边取对数并微分，得

$$\frac{dh}{h} = \frac{K}{K-1}\frac{d\tau}{\tau} \text{ 。}$$

再与(1-24)式合并得

$$d\tau = -\frac{1}{R}\cdot\frac{K-1}{K}dy \qquad (1\text{-}27)$$

将上式右侧自地面 $y=0$ 积分至高度 y，左侧相应的自地面温度 τ_0 积分至 τ，得

$$\tau = \tau_0 - \frac{1}{R}\cdot\frac{K-1}{K}y \text{ 。}$$

式中，$\frac{1}{R}\cdot\frac{K-1}{K}$ 为一常数，以 G 代表之，则上式可写成

$$\tau = \tau_0 - Gy \text{ 。}$$

由(1-27)式可以看出 $G = \frac{1}{R}\cdot\frac{K-1}{K} = -\frac{d\tau}{dy}$，即是高度升高单位值时温度的变化值，故称为温度梯度。由绝热过程计算得 $G = 0.00976$，但实际上由于大气层中空气对流并非真正绝热进行的，所以温度梯度值应由实际的观测来确定，才较为可靠。

3. 我国炮兵与航空兵标准气象条件

表征大气特性的气象诸元，不但各地不同，而且即使同一地点，也随时间而变。为了便于计算弹丸受到的空气阻力，从而计算弹道，就有必要确定出它们的地面标准值以及随高度 y 的标准分布规律。这就是标准的气象条件。当实际的气象条件与标准的气象条件不同时，再根据其偏差大小加以修正。

上面已经指出，对任意高度 y 处的空气重度和气压等值，起决定作用的是温度随高度的变化规律。

对炮兵的常规武器来说，我国曾取如下标准气象条件，其地面标准值[①]为

$$t_{0N} = 15\text{℃}；$$

$$h_{0N} = 750 \text{ 毫米汞高}；$$

① 见《我国炮兵用标准气象条件的确定》工学学报，第二卷第二期，军事工程学院 1957 年。

$e_{ON}=6.35$ 毫米汞高（相对湿度为50%时）。

由此按（1-22）和（1-23）式可以算出 τ 和 γ 的地面标准标值为：

$$\tau_{ON}=288.9^{\circ}\mathrm{K};$$

$$\gamma_{ON}\approx 1.26 \text{ 公斤/米。}$$

同样，温度随高度变化的标准定律为

当高度 $y<9300$ 公尺时，即对流层内，温度的变化规律为线性关系，即

$$\tau=\tau_{ON}-Gy。 \tag{1-28}$$

地面气温 τ_0 为地面气温标准值 τ_{ON}。温度梯度值经实际测量取平均值，定为 $G=6.328\times10^{-3}$ 度/公尺。

当 12000 公尺$<y<$30000 公尺时，即同温层内，温度保持不变的规律，即

$$\tau=\tau_{12}=221.5^{\circ}\mathrm{K}。 \tag{1-29}$$

一般炮弹的弹道高都在 30 公里以内，故大于 30 公里的高空气象条件，不再介绍。

当 9300 米$\leqslant y\leqslant$ 12000 米时，即亚同温层，温度变化规律采用抛物线规律，即

$$\tau=A+B(y-9300)+C(y-9300)^2 \tag{1-30}$$

式中常数 A、B、C 可由边界条件 $\tau_{9.3}=230^{\circ}\mathrm{K}$，$\tau_{12}=221.5^{\circ}\mathrm{K}$ 及 $\left.\frac{d\tau}{dy}\right|_{y=9300}=-G$ 求得。其值为 $A=230.0^{\circ}\mathrm{K}$，$B=G=6.328\times10^{-3}$ °K/米，$C=1.172\times10^{-6}$ °K/米^2。

温度随高度变化标准定律，如图 1-7 所示。

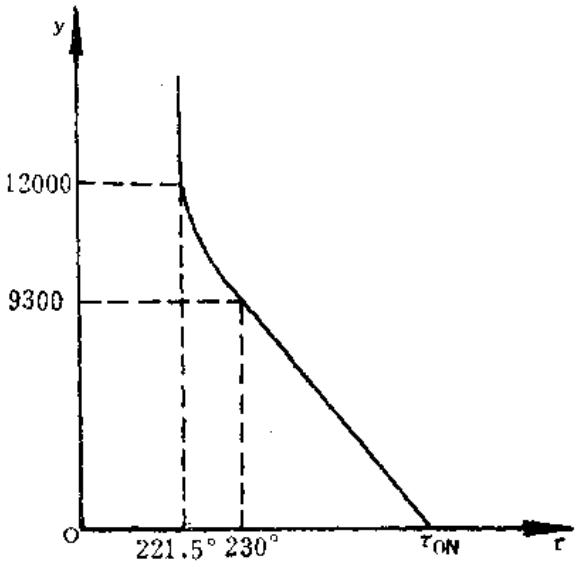


图 1-7 虚拟温度 τ 随高度 y 的变化图

有了温度随高度的变化标准定律，气压随高度的变化标准定律也可以求得。以 h_{ON} 代替（1-25）式中的 h_0，并令

$$\pi(y)=\frac{h}{h_{ON}},$$

得

$$\pi(y)=\frac{h}{h_{ON}}=e^{-\frac{1}{R}\int_0^y\frac{dy}{\tau}}。 \tag{1-31}$$

通常称 $\pi(y)$ 为气压函数，可根据温度 τ 的三段变化规律代入积分求得，通常列出专门表格（见附表 2）。

同样，比重随高度变化的标准定律也很容易求得，只需令

$$H(y)=\frac{\gamma}{\gamma_{ON}},$$

得

$$H(y)=\frac{\gamma}{\gamma_{ON}}=\frac{\tau_{ON}}{\tau}\cdot\frac{h}{h_{ON}}=\frac{\tau_{ON}}{\tau}e^{-\frac{1}{R}\int_0^y\frac{dy}{\tau}}。 \tag{1-32}$$

$H(y)$ 称为比重函数，也同样列有专门表格（见附表 1）。

$\pi(y)$ 和 $H(y)$ 随 y 的变化曲线如图 1-8 所示。

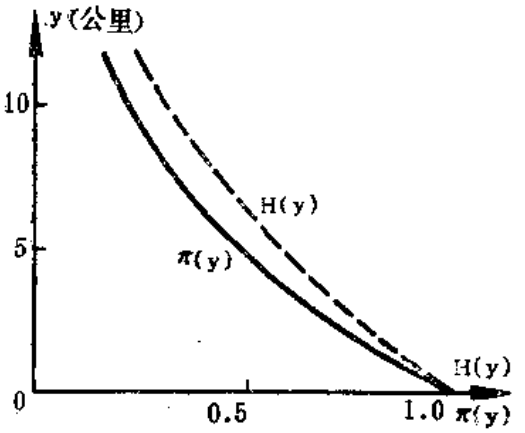


图 1-8 $\pi(y)$ 和 $H(g)$ 函数随高度 y 的变化图

在对弹道进行近似计算中，$\pi(y)$和$H(y)$往往采取以下经验公式。

在对流层内，$y\leqslant 9300$ 米，$\pi(y)$ 和$H(y)$可用以下指数形式表示：

$$\pi(y)=(1-2.1905\times10^{-5}y)^{5.4}$$

$$H(y)=(1-2.1905\times10^{-5}y)^{4.5}$$

对于比重函数，还有以下经验公式，当 $y\leqslant 10000$ 米时具有足够的准确性。

$$H(y)=e^{-1.050\times10^{-4}y}; \qquad (1\text{-}33)$$

$$H(y)=\frac{20000-y[\text{公里}]}{20000+y[\text{公里}]}。 \qquad (1\text{-}34)$$

还应指出，在炮兵标准气象条件中，还有无风的规定。

对航空兵的常规武器（主要是航空炸弹）来说，其标准气象条件①为

（1）高度以海平面为零点，高度从 0～25 公里范围内空气成份不变；

（2）风速等于零；

（3）在海平面高度上：

气　　温　$t_0=14$℃；

虚　　温　$\tau_0=288.4$°K；

气　　压　$P_0=760$ 毫米汞高；

相对湿度　$B_0=70\%$；

水蒸气分压　$e_0=8.4$ 毫米汞高。

（4）在高 $0\leqslant y\leqslant 25$ 度公里范围内，大气分为两层，即对流层和平流层，两层以对流层顶分界，对流层顶 $y=13000$ 米。

在对流层中，温度是高度的线性函数，即

$$0\leqslant y\leqslant 13000\text{ 公尺时，}\tau=\tau_0-Gy。 \qquad (1\text{-}35)$$

式中：温度梯度 $G=5.862\times10^{-3}$ 度/公尺。

在平流层中为等温大气，即

$$13000\text{ 公尺}<y<25000\text{ 公尺时}\quad \tau=\tau_{13}=212.2°\text{K} \qquad (1\text{-}36)$$

4．音速随高度的标准变化

除上述气体各参量外，音速 a 也是描述空气特性的重要参数之一。由热力学知道音速是温度的函数，因而知道温度随高度变化规律后，也同时能求得音速随高度的变化规律，

$$a=\sqrt{KgR\tau} \qquad (1\text{-}37)$$

式中，a——音速(米/秒)。

由于 $K=1.404$，$g=9.80$ 米/秒²②，$R=29.27$ 米/度，虚拟温度的地面标准值 $\tau_{0N}=$

① 航空兵标准气象条件见《航空炸弹弹道表资料汇集》空军司令部，1970 年印。

288.9°K，故音速的地面标准值为：

$$a_{0N} = \sqrt{1.404 \times 9.80 \times 29.27 \times 288.9} \approx 341.1 \text{ 米/秒。}$$

将虚拟温度随高度变化的标准定律代入音速的公式中，即可得到音速随高度的标准变化，见附表5。

二、空气阻力

弹丸在空气中运动，其间存在相对运动。具有相对运动的弹丸与空气之间的相互作用力，就是一般所说的空气阻力

1．空气阻力的组成部分

将弹丸或模型置于烟风洞中进行吹风试验时，可以观察到如下情况：

（1）当速度很小时，可看到如图1-9（a）所示的情况：诸烟缕围绕着弹丸均匀时称地分

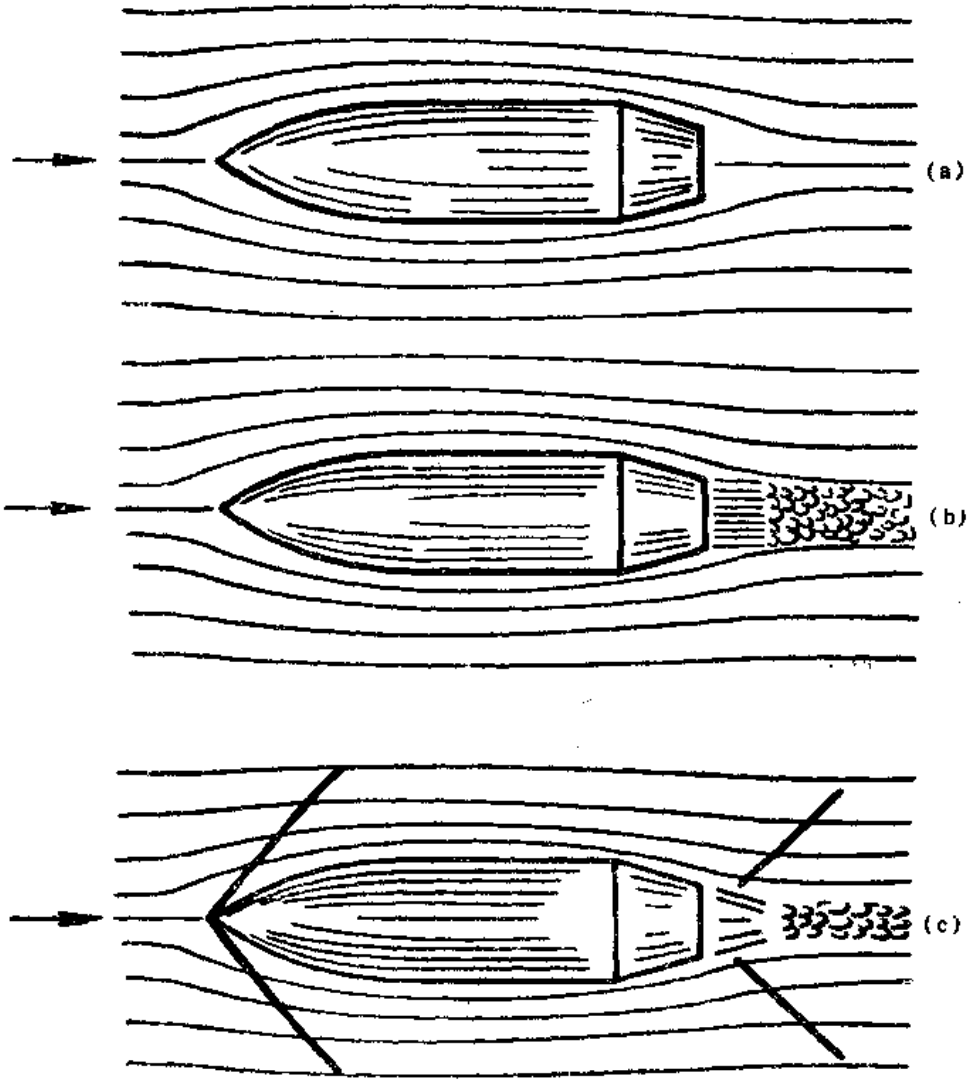


图 1-9　流过弹丸外表面的气流流线及激波图

（a）低速流动时　　（b）近音速流动时　　（c）超音速流动时

② 关于重力加速度g，炮兵工程界常取$g=9.80$米/秒²，轰炸弹道计算则取$g=9.806$米/秒²，见《航空炸弹弹道表资料汇集》，空军司令部，1970年印。

布，而且来流与去流的情况几乎完全相同。此时通过阻力天平可以测出弹丸受有一个不大的、与来流方向正相反的阻力作用。如果是理想的无粘性流体，在此情况下应该没有阻力作用。但空气是非理想流体，且具有粘性（即内摩擦），因此，由于空气的内摩擦所产生的阻力部分称为摩擦阻力。即运动着的弹丸，由于粘性关系总会带动其表面附近的一层空气一起运动，而使弹丸消耗了动能，这就是摩擦阻力产生的原因。

摩擦阻力的大小与弹丸运动速度 v、空气粘性系数 μ 及空气的接触面积、表面光洁度等有关。一般空气动力学中表示为雷诺数 $R_e=\frac{v\rho}{\mu}d$（式中，d 为弹丸直径，ρ 为气体密度。v 为相对气流速度，μ 为流体的粘性系数）。

当速度较低时，摩擦阻力占空气阻力的相当一部分，但随着速度的增大其所占成分就很小。弹丸速度在 400—500 米/秒时，摩擦阻力约占总阻力 6—10%。故对超音速弹丸，设法减小摩擦阻力来减小空气阻力的作用是不大的。

（2）如将气流速度逐渐增大至某值时，则见弹尾部附近的烟缕与弹体分离，并在弹尾部出现许多旋涡，如图 1-9（b）所示。当旋涡出现时用阻力天平测得弹丸所受阻力显著增加。由此可见伴随旋涡的出现必有新的阻力产生，与旋涡出现有关的那部分阻力称为涡流阻力。也即由于弹体表面附面层离体，而在弹体后方形成部分真空，故使弹丸前后形成压力差所相当的那一部分阻力。

涡流阻力的大小与气流速度、弹丸形状（尤其弹尾形状）等有关。为了减小涡流阻力常采用 °6～9° 的船尾形弹尾（图 1-10）。

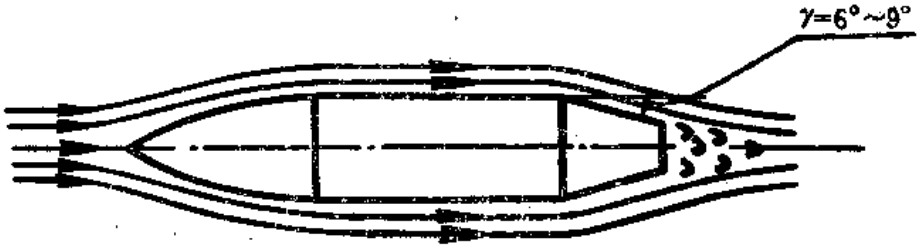


图 1-10 “船尾”型弹尾图

对于速度为 400—500 米/秒的弹丸来说，涡流阻力约占总阻力的 40—50%，对于亚音速弹丸，所占比例更大。对于高速远射程弹丸，由于在空气中飞行时间较长，故弹尾也做成船尾形为佳。

以上两种情况下的弹丸速度总是亚音速的。如在跨音速或超音速情况下做类似试验，则所见现象大不相同。

（3）如将弹丸或模型放在超音速风洞中，用晕纹照相法可以拍出如图 1-9（c）所示情况。除尾部有大量旋涡外，在弹头部与弹尾部附近发现有近似为锥状的、强烈的压缩空气层存在。这就是空气动力学中所说的激波。就是说弹丸与空气相对运动，部分气体被压缩，以致形成激波，与所消耗弹丸或气流动能相当的作用于弹丸上的力，称为激波阻力，简称波阻。

空气具有弹性，当其受到扰动时，就以一定的传播速度向外传播，其传播速度与扰动强弱有关，若为弱扰动时，则传播速度等于音速；若为强扰动时，则传播速度可以大于音速。当扰动源运动速度大于扰动传播速度时，扰动区域就被限制在一定的锥形区域内，扰动与未

扰动区域间有一分界面。对于微弱扰动，其分界面就称为马赫波，其所造成气体参量的变化是连续的。对于强扰动的分界面，称为激波，此时造成气体参量的变化是不连续的，气流方向与激波间的夹角β，称为激波角。

弹丸在空气中运动时，气流绕流弹丸表面，弹丸表面每一点都可看成是扰动沅。当弹丸速度接近音速或超音速时，这些扰动沅所产生的扰动就被限制在一定的区域。这些扰动沅扰动区域的总和也就出现了弹丸不同部位上的激波，如图 1-11 所示。有弹头波及弹尾波。

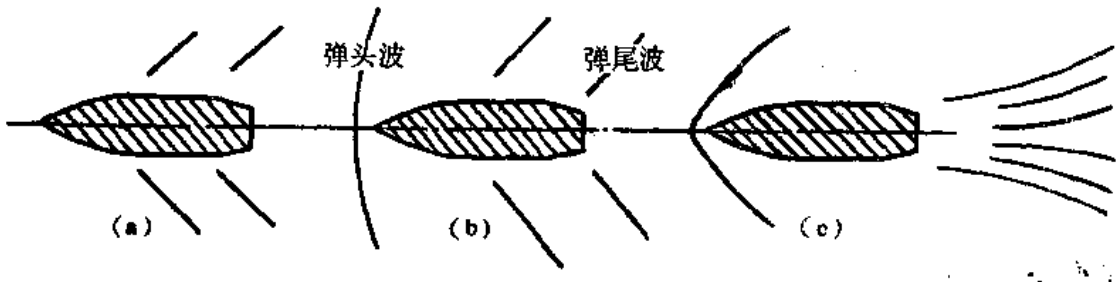


图 1-11　弹丸上产生的激波图

（a）$v/a=0.95$　（b）$v/a=1.02$　（c）$v/a=1.10$

弹头波的形状与弹速、头部形状有关。在弹速相同时，弹头部愈钝，弹头波愈可能产生脱体激波，而且波形也愈园钝；弹头愈尖锐，弹头波距弹顶愈近，甚至密接，波形也愈与园锥面类似。这是由于弹头部愈钝，其所产生的扰动愈强的缘故。弹头部形状一定时，弹丸速度愈大，弹头波愈近弹顶，甚至密接，速度再大，激波也就愈靠近弹体表面。这是由于扰动区域（即激波角）大小与扰动沅速度有关。扰动沅速度增大时，激波角随之减小的缘故。

激波强度同样与弹速及弹头部形状有关，弹头部愈钝，激波强度愈强，激波阻力也就愈大。所以超音速弹丸为了减小波阻，弹头部应尽可能做到锐长些。速度在400—500米/秒范围时，波阻约占总阻力 40—50%。

总之，对一般超音速与跨音速弹丸来说，总空气阻力是由摩擦阻力、涡流阻力和激波阻力组成。在选择和设计弹丸外形时应特别注意，根据弹丸使用范围来正确设计弹丸各部形状和结构。如对超音速弹丸，由于激波阻力所占比例最大，因而设计选择外形时应特别注重在弹丸头部形状上，如何保证使激波阻力最小。而摩擦阻力部分很小，可不必过多考虑。对于亚音速弹丸，没有激波阻力，则需着重在弹尾部形状及如何减小摩擦阻力上考虑，以减小总的阻力，因为此时涡流阻力为主要部分。

2. 阻力系数、弹形系数与空气阻力定律

在弹道学中，空气阻力的一般计算式与空气动力学中相似，即空气阻力

$$R=\frac{\rho v^2}{2}S\,C_{x_0}\left(\frac{\rho v d}{\mu},\ \frac{v}{a}\right)。\tag{1-38}$$

式中：ρ—空气密度；

v—弹丸速度；

S—弹丸最大截面积，$S=\frac{\pi}{4}d^2$；

d—弹丸直径；

C_{x_0}—当$\delta=0$时的迎面阻力系数，简称阻力系数。在一般情况下，阻力系数C_{x_0}是马赫

数$M=\frac{v}{a}$及雷诺数$R_e=\frac{\rho v d}{\mu}$的函数。

根据实验知道：当弹丸运动速度在超音速区域时，空气压缩性影响很大，此时主要影响空气阻力的是马赫数$M=\frac{v}{a}$。而雷诺数的影响主要表现在马赫数小于0.6或大于3的范围。

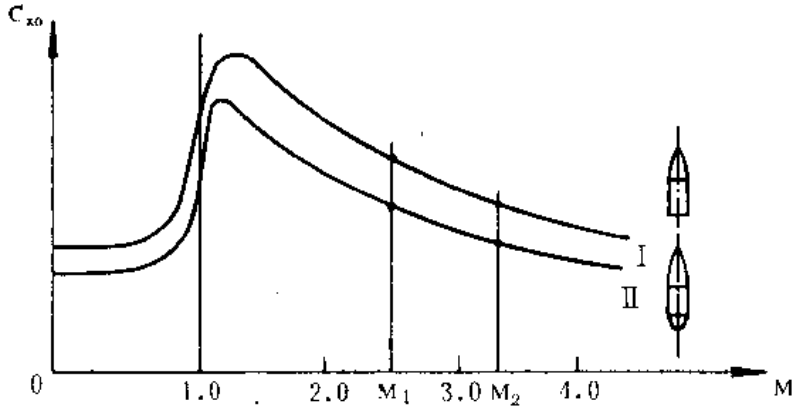


图 1-12 C_{x_0}—M 曲线图

因为，此时附面层内的流动情况对空气阻力的影响起主要作用。在外道弹应用的弹丸速度范围内，我们可认为阻力函数C_{x_0}仅是马赫数$M=v/a$的函数，即$C_{x_0}(v/a)$。因此，空气阻力公式可改写为

$$R=\frac{\rho v^2}{2}SC_{x_0}\left(\frac{v}{a}\right)。\tag{1-39}$$

现根据空气阻力形成的本质来分析阻力系数与其他因素的关系。

阻力系数$C_{x_0}(M)$与M数的关系的特点是：M数在亚音速段($M<0.75$)，C_{x_0}几乎为常数，因为此时空气阻力的主要组成部分是摩擦阻力与涡流阻力，空气压缩性没有影响。在跨音速段($M=0.8\sim1.2$)，阻力系数发生激烈变化，迅速增加，几乎是直线上升至最大值附近。这是由于弹体上开始出现局部激波，使空气阻力很快增加。由于弹头部钝化程度不同，其最大值约在$M=1.1\sim1.5$范围内。头部愈锐长其最大值位置愈与$M=1.1$处相近。过了C_{x_0}的最大值后，C_{x_0}值随M数的增大而逐渐减小。这是由于速度增大后，激波逐渐靠近弹体，激波锥越尖而使弹丸消耗的能量不如弹丸速度平方增加得那么快，因而阻力系数C_{x_0}有所减小。但这并不说明空气阻力在减小。

阻力系数除了与M数有关外，不同弹丸也有所不同，也即与弹丸的形状有关。前面已经讨论过，弹形对空气阻力的影响，即在亚音速时，头部形状虽然不同，但阻力系数可以很接近。因为这时形成空气阻力的主要部分是摩擦阻力与涡流阻力。而在超音速时，不同头部形状直接影响产生激波的强弱，因而波阻也就不同，而波阻又是空气阻力中的主要组成部分的缘故。

既然不同弹丸有不同的C_{x_0}曲线，那么在对每一种弹丸进行弹道计算时，就需要知道它的阻力系数曲线，也就需要对它进行大量的试验来确定，这样既不经济又费时间。为此，希望寻求一个较为简便的方法。

对不同弹丸的C_{x_0}'曲线进行比较，结果发现：形状相似弹丸的C_{x_0}曲线也同样相似，

也就是说在相同某一M数时，两种相似弹丸的阻力系数值的比值近似保持为一常数（如图1-12）中弹Ⅰ与弹Ⅱ），即

$$\frac{C_{x_{0}}(M_1)_{\text{Ⅰ}}}{C_{x_{0}}(M_1)_{\text{Ⅱ}}}=\frac{C_{x_{0}}(M_2)_{\text{Ⅰ}}}{C_{x_{0}}(M_2)_{\text{Ⅱ}}}=\cdots\cdots$$

即使两种弹丸形状不十分相似，但在M数变化范围不大，特别在亚音速时，这一关系仍能保持。根据这一性质，就可找到估算空气阻力的简便方法。予先选定某一种标准弹丸，且仔细地测出其阻力系数$C_{\bar{x}_{0}}$曲线，利用这一$C_{\bar{x}_{0}}$曲线与上述关系，求其他任意弹丸的$C_{x_{0}}$曲线就容易得多了。只须在常用的M数范围内测出某一M数时的阻力系数$C_{x_{0}}$值，然后找出同一M数时标准弹丸的$C_{\bar{x}_{0}}$值，求出其比值i，称为弹形系数。当求其他M数的阻力系数时，就可利用比值保持不变的关系来推算。即弹形系数式中：

$$i=\frac{C_{x_{0}}}{C_{\bar{x}_{0}}} \tag{1-40}$$

式中：$C_{\bar{x}_{0}}$—标准弹丸的阻力系数；

$C_{x_{0}}$—所求弹丸的阻力系数。

则所要求弹丸的阻力系数

$$C_{x_{0}}=iC_{\bar{x}_{0}}。$$

由（1-40）式可以看出，某一弹丸的弹形系数的大小不仅与其本身形状有关，而且与所取标准弹丸有关。实际上由于实际阻力系数不能与（1-40）式计算结果完全一致，弹形系数应随速度的改变而有不大的改变。特别在跨音速与超音速段速度变化范围较大时，误差也就大一些。

标准弹的阻力系数$C_{\bar{x}_{0}}$与M数的函数关系，就是一般所说的空气阻力定律。

十九世纪（1896年）由意大利的道弹工作者西亚切所确定的、相对头部长$x=(1.2\sim1.5)d$的多种弹丸的平均$C_{\bar{x}_{0}}-M$的函数关系，就是有名的西亚切阻力定律。

后来由于弹丸形状的改善，实际使用的弹丸形状与标准弹形状相差渐大，其$C_{x_{0}}$—M曲线形状与标准弹的曲线相差也渐大。因而其各M数处的$C_{x_{0}}$的比值相差较大，故其各M数处的弹形系数i就不能再看作近似相等而应成为M数的函数。这就需要另找新的、与当时弹形相近的标准弹，以确定新的阻力定律来代替老的阻力定律。从而产生了标准弹的相对头部长$x=(3\sim3.5)d$的1943年阻力定律。

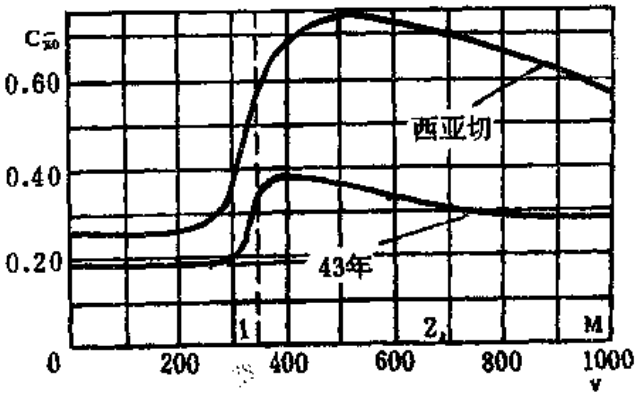


图 1-13　阻力定律$C_{\bar{x}_{0}}-M$曲线图

西亚切阻力定律与1943年定律的$C_{\bar{x}_{0}}$曲线，如图1-13所示。

随着弹丸形状的改善，将有更新的阻力定律出现。

3．空气阻力加速度、弹道系数和空气阻力函数

空气阻力对弹丸运动影响的大小，主要应由作用其上的加速度来衡量，因而我们来计算空气阻力加速度J。根据牛顿第二定律，空气阻力加速度与空气阻力的关系为

$$J=\frac{R}{m}=\frac{g}{q}\cdot\frac{\rho v^2}{2}\cdot\frac{\pi d^2}{4}C_{x_0}\left(\frac{v}{a}\right)。\tag{1-41}$$

将(1-40)式代入，并将各参量按性质分类组合，得到

$$J=\left(\frac{id^2}{q}10^3\right)\frac{\gamma}{\gamma_{0N}}\left[\frac{\pi}{8}\gamma_{0N}10^{-3}v^2C_{\bar{x}_0}\left(\frac{v}{a}\right)\right]\tag{1-42}$$

(1-42)式中主要表示与弹丸本身特性（形状、尺寸大小和重量）有关的第一个参量组合，称之为弹道系数，以C表示之

$$C=\frac{id^2}{q}10^3\text{ 公尺}^2/\text{公斤}。\tag{1-43}$$

弹道系数C的大小与标准弹丸有关。在弹药学中，弹重q一般用弹重系数C_q来表示，而

$$C_q=\frac{q}{d^3[\text{公寸}]}=\frac{q}{d^3}10^{-3}\text{ 公斤/公尺}^3\text{（计算 }C_q\text{ 时，}d\text{ 以公寸为单位）。}\tag{1-44}$$

则(1-43)可以改写为

$$C=\frac{i}{C_qd}\text{公尺/公斤}^3。\tag{1-45}$$

弹重系数C_q对同一类型的弹丸而言，其值大致相等，对一般炮弹，通常为$10<C_q<20$；对枪弹则为$18<C_q<35$。

因而对形状及内部结构给定的弹丸来说，弹道系数与口径d成反比，即口径d愈大，弹道系数C愈小，空气阻力加速度愈小，空气阻力的影响也愈小。

常用航空炮弹的弹形系数与弹道系数值，如表1-1所示。

表 1-1　　（西亚切定律）

d[公厘]	20	23	30	37
i	0.81	0.23	6.68	0.50
C[公尺²/公斤]	3.39	1.67	1.5	0.89
q[公斤]	0.0955	0.199	0.410	0.758

(1-42)式中第二参量组合，表示某高度的空气比重与地面标准值的比，也就是(1-32)式表示的比重函数。

$$H(y)=\frac{\gamma}{\gamma_{0N}}。\tag{1-46}$$

它说明了空气密度对空气阻力的影响，也即不同高度时对弹丸的运动影响也不一样。

(1-42)式中第三个参量组合，表示空气阻力与弹丸运动速度和音速a的关系，这一组合，一般称之谓空气阻力函数，并以$F(v,a)$表示

$$F(v,a)=\frac{\pi}{8}\gamma_{0N}10^{-3}v^2C_{\bar{x}0}\left(\frac{v}{a}\right)。\tag{1-47}$$

或

$$F(v,a)=4.737\times10^{-4}v^2C_{\bar{x}_0}\left(\frac{v}{a}\right)。$$

有时为了应用上方便，也常引入$G(v,a)$函数，其关系为：

$$F(v,a)=G(v,a)\cdot v。\tag{1-48}$$

阻力函数 $F(v,a)$ 或 $G(v,a)$ 中均包含有标准弹的阻力系数 $C_{\bar{x}_0}(v/a)$。因此，用不同的标准弹丸，就有不同的空气阻力定律。如西亚切定律、1943 年定律等。

综合 (1-43)、(1-46)、(1-48) 各式，将 (1-42) 改写成

$$J=CH(y)\,F(v,a)。\tag{1-49}$$

或

$$J=CH(y)\,G(v,a)\cdot v 。\tag{1-50}$$

可见弹道系数 C、空气密度与阻力函数值直接影响弹道特性的好坏。弹道系数 C 值的大小标志着这种弹丸弹道特性的好坏，所以是重要的弹道特征数之一。

从 (1-47) 式可以看出，阻力函数 $F(v,a)$ 和 $G(v,a)$ 是两个变量 v 和 a 的函数，这就给实验测定和编制表册增加了麻烦。通常将音速取作地面标准值 $a_{0N}=341.1$ 米/秒来编表。而当 $a\approx a_{0N}$ 时，只需将弹丸速度 v 换算成与 a_{0N} 相当时的速度 v_τ 来查表计算。即表册按下式编制

$$G(v_\tau,a_{0N})=4.74\times10^{-4}\,v_\tau\,C_{\bar{x}_0}\left(\frac{v_\tau}{a_{0N}}\right)\tag{1-51}$$

而实际所求 $G(v,a)$ 是按

$$G(v,\,a)=4.74\times10^{-4}\,v\,C_{\bar{x}_0}\left(\frac{v}{a}\right),\tag{1-52}$$

式计算。我们知，在 $\frac{v}{a}=\frac{v_\tau}{a_{N0}}$ 时 $C_{\bar{x}_0}\left(\frac{v}{a}\right)=C_{\bar{x}_0}\left(\frac{v_\tau}{a_{0N}}\right)$，因而令

$$v_\tau=v\,\frac{a_{0N}}{a}=v\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}\tag{1-53}$$

也就容易找出 $G(v_\tau,\,a_{0N})$ 与 $G(v,\,a)$ 的关系，而查表可以计算出 $G(v,\,a)$ 值。

将 (1-52) 式右方乘以 $\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}\times\sqrt{\frac{\tau}{\tau_{0N}}}$，则得：

$$\begin{aligned}G(v,\,a)&=4.74\times10^{-4}v\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}\;C_{\bar{x}_0}\left(\frac{v}{a}\right)\sqrt{\frac{\tau}{\tau_{0N}}}\\&=4.74\times10^{-4}v\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}\;C_{\bar{x}_0}\left(\frac{v_\tau}{a_{0N}}\right)\sqrt{\frac{\tau}{\tau_{0N}}},\end{aligned}$$

得

$$G(v,\,a)=G(v_\tau,\,a_{N0})\cdot\sqrt{\frac{\tau}{\tau_{0N}}}。\tag{1-54}$$

将 (1-54) 式代入阻力加速度 (1-50) 式中，得到

$$J=CH(y)\sqrt{\frac{\tau}{\tau_{0N}}}G(v_\tau,a)\cdot v 。$$

由于 $\sqrt{\frac{\tau}{\tau_{0N}}}$ 也是 y 的函数，因而可与 $H(y)$ 合并，并令

$$H_\tau(y)=\sqrt{\frac{\tau}{\tau_{0N}}}H(y),\tag{1-55}$$

则得用 $G(v_\tau,\,a_{0N})$ 函数来计算阻力加速度的公式为

$$J = CH_\tau(y)\, G(v_\tau, a_{0N}) \cdot v \ 。 \tag{1-56}$$

$G(v_\tau, a_{0N})$ 常简写成 $G(v_\tau)$，$F(v_\tau, a_{0N})$ 简写成 $F(v_\tau)$。因而实际考虑音速影响的计算步骤如下：

（1）由高度 y 查出 $\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}$（见附表 3）并计算 v_τ

$$v_\tau = v\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}};$$

（2）由 $G(v_\tau, a_{0N})$ 表查出与 v_τ 相当的 $G(v_\tau, a_{0N})$ 值（见附表 7）；

（3）由高度查出 $H_\tau(y)$ 值（见附表 4）。

从而按（1-56）式即可计算出高度 y、速度 v、弹道系数为 C 的空气阻力加速度值。

例 1-1，计算 23 炮弹在高度为 8500 公尺，速度为 600 公尺/秒时，所受的空气阻力加速度值。

解：由（1-56）式知阻力加速度的公式为

$$J = CH_\tau(y)\, G(v_\tau) \cdot v 。$$

弹道计算中一般采用对数计算，两边取对数得

$$\lg J = \lg C + \lg H_\tau(y) + \lg G(v_\tau) + \lg v 。$$

由已知条件：

23 炮弹的弹道系数 $C = 1.67$；则 $\lg C = 0.2227$；

$y = 8500$ 公尺，查表得 $\lg H_\tau(y) = \bar{1}.5617$，$\lg\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}} = 0.0447$；

由 $v = 600$ 公尺/秒，则 $\lg v = 2.7782$，

$$\lg v_\tau = \lg v + \lg\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}} = 2.7782 + 0.0447 = 2.8229 \ 。$$

查表得 $\lg G(v_\tau) = \bar{1}.3441$

则 $\lg J = 0.2227 + \bar{1}.5617 + \bar{1}.3441 + 2.7782 = 1.9067$

故 $J = 80.67$ 公尺/秒^2。

第一章 习 题

1-1 已知大气压强 $P_0 = 1.033$ 公斤/厘米^2，$T_0 = 273°\mathrm{K}$ 时，1 克分子理想气体的体积 $v_0 = 22.4$ 升，重量 $Q = 2.896 \times 10^{-2}$ 公斤，求气体状态常数 R。

1-2 设空气温度 $t = 15℃$，压强 $h = 750$ 毫米汞柱，内含水蒸气分压强 $e = 6.35$ 毫米汞柱，求此时的空气重度 γ，虚温 τ 及密度 ρ。

1-3 已知高度 $y < 9300$ 米时，$\tau = \tau_{0N} - Gy$；$y < 12000$ 米时，$\tau = \tau_{12000}$；试将压强公式 $h = h_{0N}\, e^{-\frac{1}{R}\int_0^y \frac{dy}{\tau}}$ 按此二段高度积分化简。

答案：$h = h_{0N}\left(1 - \frac{G}{\tau_{0N}}y\right)^{\frac{1}{RG}}$ 及 $h = h_{12000} \cdot e_{xp}\left\{-\frac{y - 12000}{R\tau_{12000}}\right\}$。

1-4 根据大气铅直平衡原理，若坐标原点取在空中某点，y 轴指向下方，试推导出压强 h 随 y 的变化关系。

1-5 设某型弹丸 $C=0.67$，在高度 $y=4500$ 米处，当时的飞行速度 $V=1050$ 米/秒，试分别用 $J=CH(y)\,G(V)V$ 及 $J=CH_{\pi}(y)\,G(V_{\pi})V$ 公式查 $C_{\bar{x}_0}(V/a)$ 表或查 $G(V_{\pi})$ 表计算 J 值。并比较其误差。

1-6 某型火箭弹 $q_0=17.32$ 公斤，$\omega=3.87$ 公斤，设火药等速燃烧，燃烧时间 $t_k=1.04$ 秒，平均推力 $P_{PJ}=840$ 公斤，试反求有效排气速度 u_e。

1-7 某型火箭弹、$q_0=49$ 公斤，$\omega=9.4$ 公斤，$d=0.212$ 米，$u_e=1800$ 米/秒，$|\dot{m}|=0.94$ 公斤·秒/米，试求弹道上 O 点及 K 点的推力 P，加速度 a 及有效排气速度 u_e。

第二章　弹丸质心运动方程式的组成

§ 1　外弹道学基本问题的假设

弹丸在空间的运动相当为一刚体运动，其整个运动应包括质心运动及围绕质心的运动两部分，且这两部分运动又是相互影响不可分割的，所以对弹丸运动规律的研究是非常复杂的。为此，必须在分析主要、次要因素的基础上引进一些必要的简化假设，抓住主要因素求解得出问题的主要规律。然后对次要问题加以修正。考虑到弹丸在实际飞行过程中，弹丸轴线与速度向量间的夹角通常不超过°3～4°，其所引起的空气阻力偏离轴线方向也就很小。因而可以近似地认为弹轴在整个飞行时间里都与弹道切线（即飞行速度方向）相重合。此时，弹丸的运动就可看成为质点运动，而把弹丸绕质心运动对质心运动的影响忽略不计。在这一假设下，我们就可将弹丸运动分做两个单独方程组来讨论：一组是描述弹丸的质心运动；另一组是描述弹丸绕质心的运动。这样就把问题大大简化了。

在解火箭弹质心运动时，综合提出以下假设：

1．在火箭弹整个飞行时间内，设其运动速度方向始终与弹轴运动方向重合，即章动角 $\delta \doteq 0$。则空气阻力作用线通过质心，方向与速度方向相反。基于这一假设就可将弹丸运动看成为一个质点的运动；

2．设推力 P 或推力加速度 a 通过质心，其方向与速度方向相同，亦即火箭发动机是完全理想的情况；

3．由于射程不大，因而可假设重力加速度为一常向量，方向始终铅直向下；

4．地球曲率及哥氏加速度均忽略不计；

5．空气的压强、温度、湿度和比重在地面是标准值，且它们按高度的分布也是标准的；

6．没有风，即空气对于地面没有相对运动。

由于推力、空气阻力和重力在所假设的条件下均在射击面内，而没有垂直于射击面的分量，因而在这些基本条件下的火箭弹质心运动轨迹是一平面曲线。至于非火箭弹也是同样，因为它们只是相差有推力这一点，所以其质心运动轨迹也是一平面曲线。

§ 2　质心运动方程式的组成

在第一章里，已讨论了火箭质心运动向量方程式为

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a} + \bar{J} + \bar{g}。 \tag{2-1}$$

而非火箭的质心运动向量方程式为

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{J} + \bar{g}。 \tag{2-2}$$

式中推力加速度 a 按下式计算

$$a = \left|\frac{m}{m}\right| u_e \circ \tag{2-3}$$

空气阻力加速速 J 按下式计算

$$J = CH(y)\,G(v,a)\,v \circ \tag{2-4}$$

当应用弹道表考虑音速影响时，应按下式计算

$$J = GH_\tau(y)\,G(v_\tau)\,v \circ \tag{2-5}$$

我们讨论弹道必须在采用某一坐标系情况下进行，由于不同的弹丸在实际应用中参量不完全一样，且其近似计算方法也不相同，因而常采用各种坐标系。如斜角坐标系、直角小抬高角坐标系以及轰炸弹道所用的直角坐标系等。讨论弹道总的方法在于先确定好坐标系，画出弹道及作用在弹丸上的诸加速度，确定弹道诸元相对坐标系的关系。然后应用质心运动向量方程式在坐标系中投影，得出方程组，看变量数与所得方程式数目是否一致，否则再增加联系方程。然后找初始条件进行方程组积分及讨论弹道特性。

一、斜角座标系火箭弹弹丸质心运动方程式的组成

在解与空中射击有关的弹道诸元问题时，采用以射出点 o 为原点的斜角坐标系 $\xi o\eta$ 是比较方便的。设取距离地面高度为 H 的射出点 o 为坐标原点，斜角坐标系 $\xi o\eta$ 的 ξ 轴取在初速 V_{01} 方向（对火箭弹来说此即火箭弹飞离滑轨时的速度方向，而通常也即滑轨方向）顺射向为正，η 轴铅直向下为正（如图 2-1）。

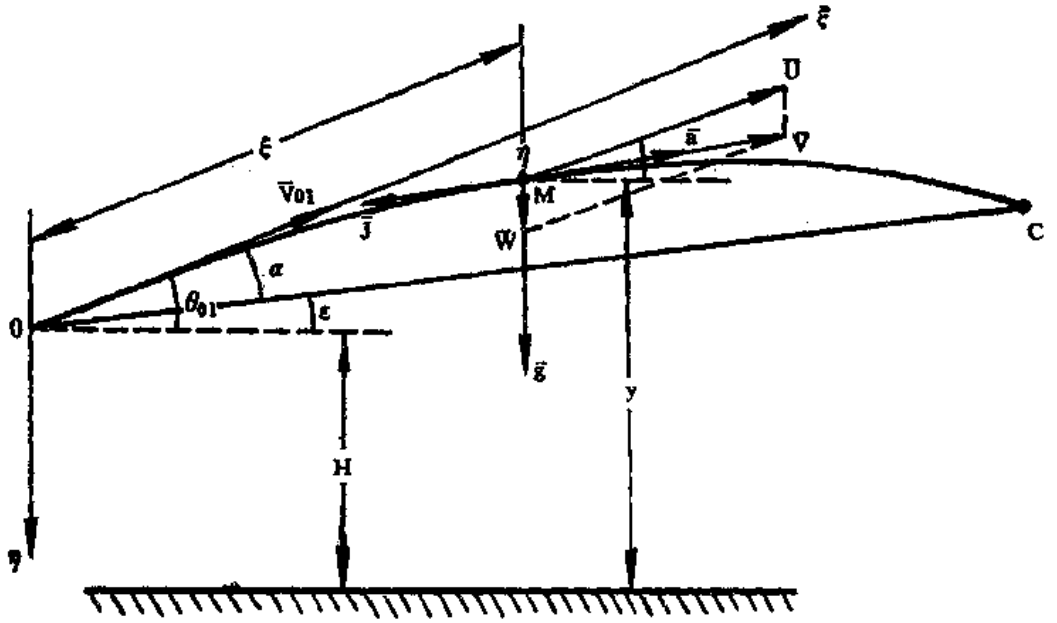


图 2-1　斜角坐标系图

弹丸在重力作用下弹道必然向下弯曲。设目标为 C，则 OC 为目标线，高低角为 ε，抬高角为 α，则初始射角 θ_{01} 为

$$\theta_{01} = \alpha + \varepsilon \circ \tag{2-6}$$

弹道上任一点 M，其速度 V 在弹道的切线方向，速度 V 在 ξ 轴及 η 轴上的两个投影分别为 U 与 W。重力加速度 $\bar{g}$ 的方向铅直向下，因而与 η 方向一致，在 ξ 轴上的投影为零。推

力加速度 $\bar{a}$ 与 $\bar{V}$ 方向一致，在 ξ 轴与 η 轴的分量分别为 $a\frac{U}{V}$ 及 $a\frac{W}{V}$。空气阻力加速度 J 与 $\bar{V}$ 方向相反，则在 ξ 轴及 η 轴上的分量为 $-J\frac{U}{V}$ 及 $-J\frac{W}{V}$。现将质心运动向量方程式中的各项在 ξ 及 η 轴上的投影值列表于下。

	$\frac{d\bar{V}}{dt}$	$\bar{a}$	$\bar{J}$	$\bar{g}$
ξ	$\frac{dU}{dt}$	$a\frac{U}{V}$	$-J\frac{U}{V}$	0
η	$\frac{dW}{dt}$	$a\frac{W}{V}$	$-J\frac{W}{V}$	g

这样立即可写出方程 (2-1) 在 ξ 轴 η 轴上的投影方程为

$$\frac{dU}{dt}=a\frac{U}{V}-J\frac{U}{V},$$

$$\frac{dW}{dt}=a\frac{W}{V}-J\frac{W}{V}+g。$$

以 (2-5) 式代入则得

$$\frac{dU}{dt}=a\frac{U}{V}-C\frac{q_K}{q}H_\tau(y)G(V_\tau)U;$$

$$\frac{dW}{dt}=a\frac{W}{V}-C\frac{q_K}{q}H_\tau(y)G(V_\tau)W+q。$$

式中，阻力加速度项出现 q_K/q 是由于火箭弹在主动段任一瞬间重量为 q，而弹道系数 C 中的弹丸重量是按一定的弹丸重量来定义的，在此式中

$$C=\frac{id^2}{q_K}\times 10^3。$$

即取为火箭被动段的弹丸重量 q_K。现计算主动段，故要乘上 q_K/q 因子。

为了确立质心坐标，因而还要两个确定坐标的方程，最后得到火箭弹在弹道主动段上质心运动的斜角坐标系方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&*\frac{dU}{dt}=a\frac{U}{V}-C\frac{q_K}{q}H_\tau(y)G(V_\tau)U, && ①\\
&*\frac{dW}{dt}=a\frac{W}{V}-C\frac{q_K}{q}H_\tau(y)G(V_\tau)W+g && ②\\
&*\frac{d\xi}{dt}=U, && ③\\
&*\frac{d\eta}{dt}=W。 && ④
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}7)$$

* 表示相互间有联立性，表示四个方程式必须同时联立求解。

现有四个方程式，可是共有 U、V、W、ξ、η、y 六个变量，因而还缺两个方程式，找两个联系方程为

$$y=H+\xi\sin\theta_{01}-\eta。 \qquad (2\text{-}8)$$

$$\bar{V}=\bar{U}+\bar{W}=U\bar{\xi}^0+W\bar{\eta}^0。 \qquad (2\text{-}9)$$

式中 $\bar{\xi}^0$、$\bar{\eta}^0$ 分别为 ξ 及 η 轴的单位向量。(2-8) 式可由图 2-1 中几何关系求得。

方程的初始条件应由发射条件来确定。一般火箭弹发射起始段有一滑轨，滑轨长 l_p，在此滑轨上速度 V 由 V_1 增加到 V_{01}(火箭弹飞离滑轨时的速度)，而 η 始终为 0 。因而其初始条件：

当 $t=0$ 时，$U=V_1$，$W=0$，$\xi\approx 0$，$\eta=0$ 。

方程组(2-7) 的①、③两式由 $t=0$ 开始积起；而②、④两式则应自火箭弹飞离滑轨时的时间 $t=t_g$ 开始积起。由于滑轨很短，也可以一律自滑轨起点的初始条件积起。

火箭弹在弹道被动段上的受力性质和非火箭弹完全一样，故其运动方程式也完全相似，但初始条件不同。其运动方程组根据 (2-2) 式在坐标系中投影而得，或令 (2-7) 式中 $a\approx 0$及 $q=q_K$ 也可以得出火箭弹在弹道被动段上及非火箭弹的运动方程组为

$$\left.\begin{aligned} &*\frac{dU}{dt}=-CH_\tau(y)G(V_\tau)U, && ①\\ &*\frac{dW}{dt}=-CH_\tau(y)G(V_\tau)W+g, && ②\\ &*\frac{d\xi}{dt}=U, && ③\\ &*\frac{d\eta}{dt}=W\ 。 && ④ \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}10)$$

联系方程

$$y=H+\xi\sin\theta_{01}-\eta,$$
$$\bar{V}=U\bar{\xi}^0+W\bar{\eta}^0。$$

对火箭弹，在弹道被动段上取新坐标系 $\xi_1K\eta_1$，如图 2-2 所示，坐标原点为主动段结束点 K，η_1 铅直向下，ξ_1 则取与 v_K 方向一致。因此方程组 (2-10) 中 ξ 应为 ξ_1，η 应为 η_1 。其初始条件则为 $t=t_K$(火药装药燃烧总时间)时，$U=V_K$ (主动段末端弹丸速度)，$W=0$，$\xi_1=0$，$\eta_1=0$ 。

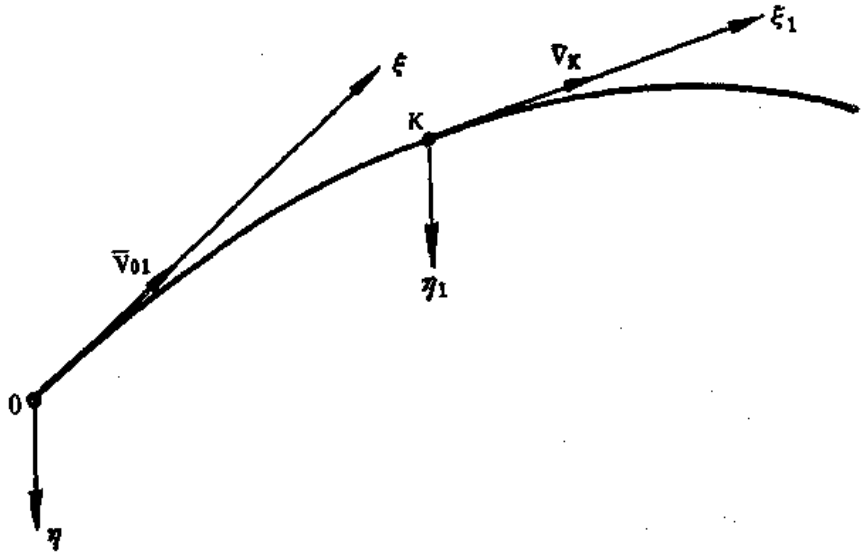


图 2-2 火箭弹道的主动段和被动段图

对非火箭弹，则初始条件为

$t=0$ 时，$U=V_{01}$，$W\approx 0$，$\xi=0$ 和 $\eta=0$

在实际使用中，常以距离为自变量，即将自变量 t 改为 ξ。

由复合微分

$$\frac{d}{d\xi}=\frac{dt}{d\xi}\frac{d}{dt}=\frac{1}{U}\frac{d}{dt}。$$

将其代入方程组（2-7）得到

$$\left.\begin{aligned}
&*\frac{dU}{d\xi}=\frac{a}{V}-C\frac{q_K}{q}H_\tau(y)G(V_\tau) && ①\\
&*\frac{dW}{d\xi}=\frac{a}{V}\frac{W}{U}-C\frac{q_K}{q}H_\tau(y)\,G(V_\tau)\frac{W}{U}+\frac{g}{U}, && ②\\
&*\frac{dt}{d\xi}=\frac{1}{U}, && ③\\
&*\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{W}{U}。 && ④
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}11)$$

引入

$$P=\frac{W}{U}=\frac{d\eta}{d\xi},$$

则

$$\frac{dP}{d\xi}=\frac{d\left(\frac{W}{U}\right)}{d\xi}=\frac{U\frac{dW}{d\xi}-W\frac{dU}{d\xi}}{U^2}。$$

将（2-11）式中的①、②代入上式并化简得

$$\frac{dP}{d\xi}=\frac{g}{U^2}。$$

可见引入 P 的目的是使方程式简单。最后得火箭弹在弹道主动段上，以 ξ 为自变量的质心运动方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&*\frac{dU}{d\xi}=\frac{a}{V}-C\frac{q_K}{q}H_\tau(y)\,G(V_\tau),\\
&*\frac{dP}{d\xi}=\frac{g}{U^2},\\
&\frac{dt}{d\xi}=\frac{1}{U},\\
&*\frac{d\eta}{d\xi}=P。
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}12)$$

联系方程仍为（2-8）与（2-9）两式。

初始条件：

$\xi=0$ 时，$U=V_1$，$P=0$，$t=0$，$\eta=0$。

对于非火箭弹，以 ξ 为自变量的质心运动方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&*\frac{dU}{d\xi}=-CH_\tau(y)\,G(V_\tau),\\
&*\frac{dP}{d\xi}=\frac{g}{U^2},\\
&\frac{dt}{d\xi}=\frac{1}{U}\\
&*\frac{d\eta}{d\xi}=P。
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}13)$$

联系方程：

$$y = H + \xi \sin\theta_{01} - \eta$$

$$\vec{V} = U\vec{\xi}^0 + PU\vec{\eta}^0$$

初始条件：

$\xi = 0$ 时，$U = V_{01}$，$P = 0$，$t = 0$，$\eta = 0$。

二、直角小抬高角坐标系的运动方程式的组成

直角小抬高角坐标系主要应用在解炮弹弹道上，因而应用(2-2)式投影来求运动方程组。

先取直角坐标系 $\xi o\zeta$，坐标原点 o 在射出点，ξ 轴取在目标线方向，ζ 与 ξ 轴垂直，转角方向以逆时针方向为正。水平线与 $o\xi$ 轴之间夹高低角 ε，$o\xi$ 轴与初速 V_{01} 之间夹抬高角 α，如图 2-3 所示。

再取自然坐标系 τMn，M 点为任意瞬间弹道上的一点，τ 轴在弹道切线(即 $\vec{V}$)方向，n 轴为法线方向。ξ 轴与任一瞬间速度向量 $\vec{V}$ 之间夹角为 φ。

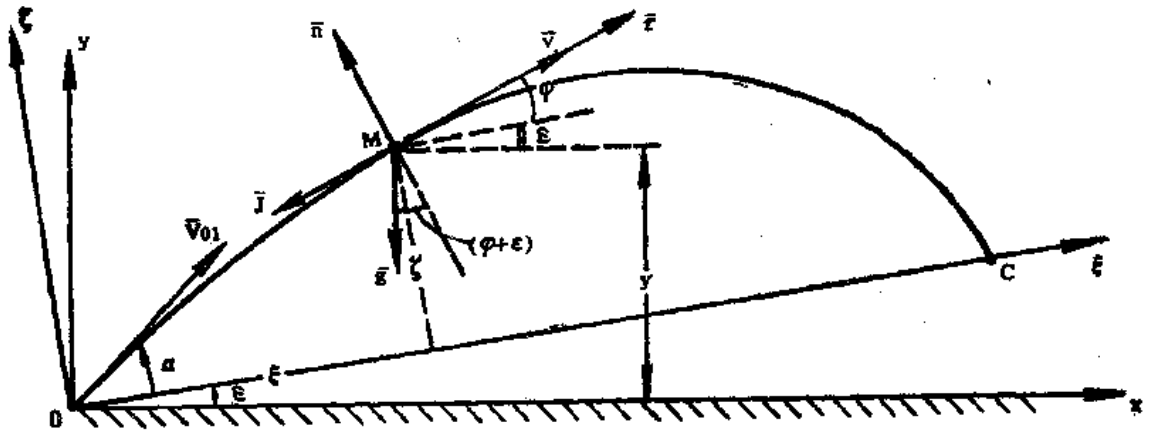


图 2-3　地面直角小抬高角坐标系图

将(2-2)式中各项投影在 τ、n 两轴，其各分量列表于下。

	$\frac{d\vec{V}}{dt}$	$\vec{J}$	$\vec{g}$
τ	$\frac{dV}{dt}$	$-J$	$-g\sin(\varphi+\varepsilon)$
n	$V\frac{d\varphi}{dt}$	0	$-g\cos(\varphi+\varepsilon)$

得运动方程式

$$\frac{dV}{dt} = -CH_\tau(y)\,G(V_\tau)V - g\sin(\varphi+\varepsilon),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g\cos(\varphi+\varepsilon)}{V}。$$

将以上两方程式加确定坐标的两个方程式，就得到炮弹质心运动方程组为：

$$
\left.\begin{aligned}
&*\frac{dV}{dt} = -CH_x(y)\,G(V_x)\,V - g\sin(\varphi+\varepsilon),\\
&*\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g\cos(\varphi+\varepsilon)}{V},\\
&\frac{d\xi}{dt} = V\cos\varphi,\\
&*\frac{d\zeta}{dt} = V\sin\varphi\ 。
\end{aligned}\right\} \tag{2-14}
$$

联系方程

$$
y = \zeta\cos\varepsilon + \xi\sin\varepsilon\ 。 \tag{2-15}
$$

初始条件：

当 $t=0$ 时，$V=V_{01}$，$\varphi=\alpha$，$\xi=0$，$\zeta=0$。

以上所讨论的情况为射出点在地面时，即地面射击情况，当空中射击时，设射击高度为 H，则其联系方程改变为

$$
y = H + \zeta\cos\varepsilon + \xi\sin\varepsilon\ 。 \tag{2-16}
$$

如图 2-4 所示。运动方程组与初始条件并无改变。

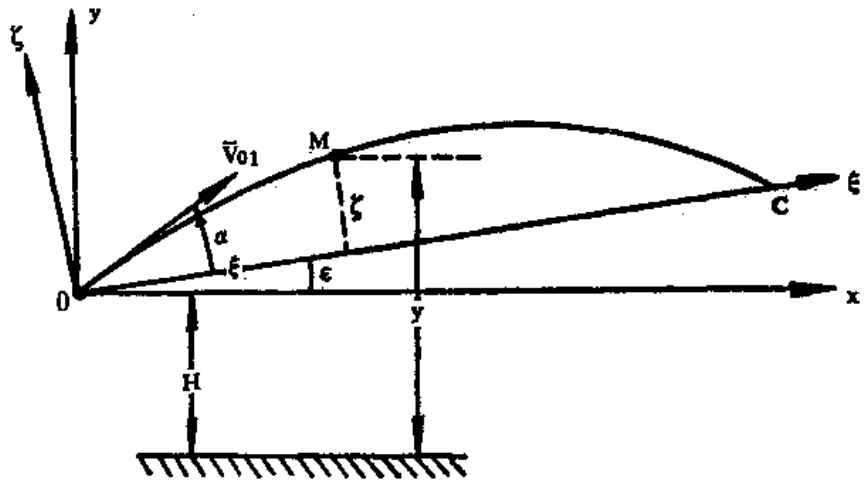


图 2-4　空中直角小抬高角坐标系图

当用 ξ 作自变量时，则以

$$
dt = \frac{d\xi}{V\cos\varphi},
$$

代入各式化简后得

$$
\left.\begin{aligned}
&*\frac{dV}{d\xi} = -CH_x(y)\,G(V_x)\frac{1}{\cos\varphi} - \frac{g\sin(\varphi+\varepsilon)}{V\cos\varphi},\\
&*\frac{d\varphi}{d\xi} = -\frac{g\cos(\varphi+\varepsilon)}{V^2\cos\varphi},\\
&\frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{V\cos\varphi},\\
&*\frac{d\zeta}{d\xi} = \mathrm{tg}\,\varphi\ 。
\end{aligned}\right\} \tag{2-17}
$$

联系方程：

地面射击时，$y=\xi\cos\varepsilon+\xi\sin\varepsilon$。

空中射击时，$y=H+\xi\cos\varepsilon+\xi\sin\varepsilon$。

初始条件：

当$\xi=0$时。$V=V_{01}$，$\varphi=\alpha$，$t=0$，$\xi=0$。

三、轰炸用直角坐标系运动方程式的组成

取直角坐标系xoy，坐标原点取在投弹高度为H的投弹点o上，x轴取在射击面内的水平方向，y轴铅直向下，如图2-5所示。转角方向规定顺时针为正。设速度向量$\bar{V}$在x轴与y轴上的分量分别为U与W。

按类似方法，用(2-2)式在此坐标系内投影，得到炸弹质心运动方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&*\frac{dU}{dt}=-CH_{\varphi}(H-y)\,G(V_{\varphi})U,\\
&*\frac{dW}{dt}=-CH_{\varphi}(H-y)\,G(V_{\varphi})W+g。\\
&\frac{dx}{dt}=U=V\cos\theta,\\
&*\frac{dy}{dt}=W=V\sin\theta。
\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}18)$$

联系方程为

$$V=\sqrt{U^2+W^2}。$$

初始条件则看不同的轰炸方法而定。

水平轰炸时（见图2-5），由于飞机速度V在x轴方向，因而初始条件为

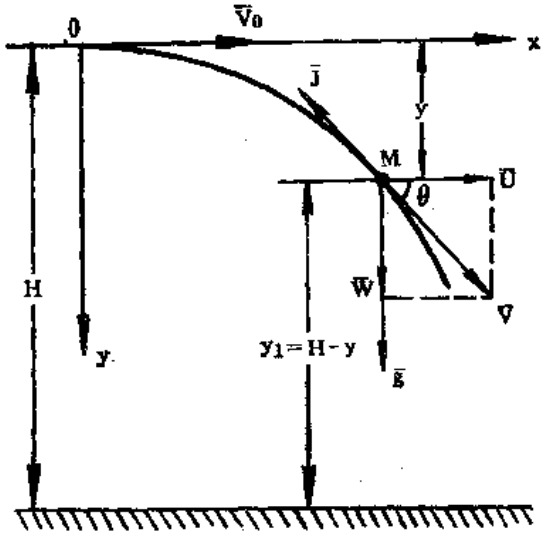


图 2-5 水平轰炸图

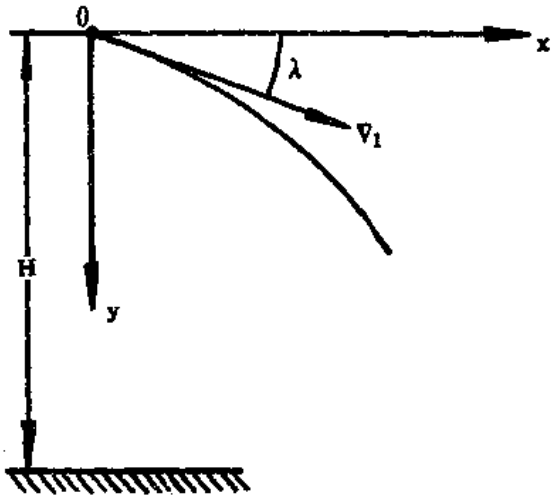


图 2-6 俯冲轰炸图

$t=0$时，$U=V_1$，$W=0$，$x=0$，$y=0$。

俯冲轰炸时（见图2-6）

$t=0$时，$U=V_1\cos\lambda$，$W=V_1\sin\lambda$，$x=0$，$y=0$。

其中：λ—俯冲角；

V_1—飞机投弹瞬间的速度。

同样当使用其他特殊轰炸方法（如上仰轰炸等）时，只需知道投弹瞬间炸弹速度与 xoy 坐标系的关系，就可以确定初始条件来进行弹道计算。

作为自空中投掷炸弹的弹道，还宜于取纵坐标 y 为自变量。

由复合微分

$$\frac{dU}{dy}=\frac{dU}{dt}\frac{dt}{dy}=-CH_\tau(H-y)\,G(V_\tau)/P,$$

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dP}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dy}=\frac{g}{U^2P}。$$

和

$$\frac{dt}{dy}=\frac{1}{UP}\quad 及\quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{P}。$$

得到以 y 为自变量的弹丸质心运动方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&*\frac{dU}{dy}=-CH_\tau(H-y)\,G(V_\tau)/P, && ①\\
&*\frac{dP}{dy}=g/U^2P, && ②\\
&*\frac{dx}{dy}=1/P, && ③\\
&\frac{dt}{dy}=1/UP。 && ④
\end{aligned}\right\}\qquad (2\text{-}19)$$

联系方程为

$$V=U\sqrt{1+P^2}$$

积分的初始条件同样以不同的轰炸方法而定。

水平轰炸时

$y=0$ 时，$U=V_1$，$P=0$，$x=0$，$t=0$

俯冲轰炸时

$y=0$ 时，$U=V_1\cos\lambda$，$P=\operatorname{tg}\lambda$，$x=0$，$t=0$

其中：λ—俯冲角；（可看作水平轰炸时，$\lambda=0$）。

V_1—飞机投弹瞬间的速度。

同样可以推导出以 t 为自变量的、直角坐标系（y 为纵坐标，x 为横坐标，W 与 U 分别为弹丸速度 V 在 y 与 x 方向的投影）的质心运动方程组如下：

$$\left.\begin{aligned}
&*\frac{dU}{dt}=-CH_\tau(H-y)\,G(V_\tau)U, && ①\\
&*\frac{dW}{dt}=-CH_\tau(H-y)\,G(V_\tau)W+g && ②\\
&*\frac{dy}{dt}=W, && ③\\
&\frac{dx}{dt}=U, && ④\\
&V_\tau=\sqrt{U^2+W^2}\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}。 && ⑤
\end{aligned}\right\}\qquad (2\text{-}20)$$

积分的起始条件为 $t=0$ 时，

$$U=U_0=V_1\cos\lambda,$$

$$W=W_0=V_1\sin\lambda,$$

$$y=y_0=0,$$

$$x=x_0=0\ 。$$

还可得到以 x 为自变量的方程组如下：

$$\left.\begin{aligned}
&*\frac{dU}{dx}=-H_\tau(H-y)\,G(V_\tau), && ①\\
&*\frac{dP}{dx}=\frac{g}{U^2}, && ②\\
&*\frac{dy}{dx}=P, && ③\\
&\frac{dt}{dx}=\frac{1}{U}, && ④\\
&V_\tau=U\sqrt{1+P^2}\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}。 && ⑤
\end{aligned}\right\}\qquad (2\text{-}21)$$

积分的起始条件为 $x=0$ 时，

$$U=U_0=V_1\cos\lambda,$$

$$P=P_0=\operatorname{tg}\lambda,$$

$$y=y_0=0,$$

$$t=t_0=0。$$

§ 3　空气弹道的一般特性

上一节推出了各种坐标系的质心运动方程式，这样只需进行积分求解就可以求得弹道诸元，但也看出其求解是非常繁杂的。如果在求解运动方程式之前对弹道的若干特性作一定性的分析，对于弹道的求解或计算是十分有益的。下面根据弹丸质心运动方程组来介绍一些常用空气弹道的一般特性。

一、弹丸速度沿全弹道的变化

首先讨论火箭弹速度沿全弹道的变化情况。

火箭弹全弹道分为两部分：前一部分是火箭发动机工作时，弹丸飞行的轨道，称弹道的主动段；后一部分是发动机停止工作后的那一段弹道，称弹道被动段。在弹道主动段上，由于推力加速度 a 大于阻力加速度和重力加速度在它方向上的分量和，因而火箭弹的速度是不断增加的。直到主动段末端点速度达到最大值，如图 2-7(6) 速度曲线的 $a'K$ 段。

在弹道被动段上，火箭发动机停止了工作，即 $a=0$，则其运动特性与普通非火箭弹的运动特性完全一样，只是起始条件不同，而且此时弹丸仅受空气阻力与重力的作用。现用 (2-14) 式中第(1)式来分析。

$$\frac{dV}{dt}=-CH_\tau(y)\,G(V_\tau)V-g\sin(\varphi+\varepsilon)。$$

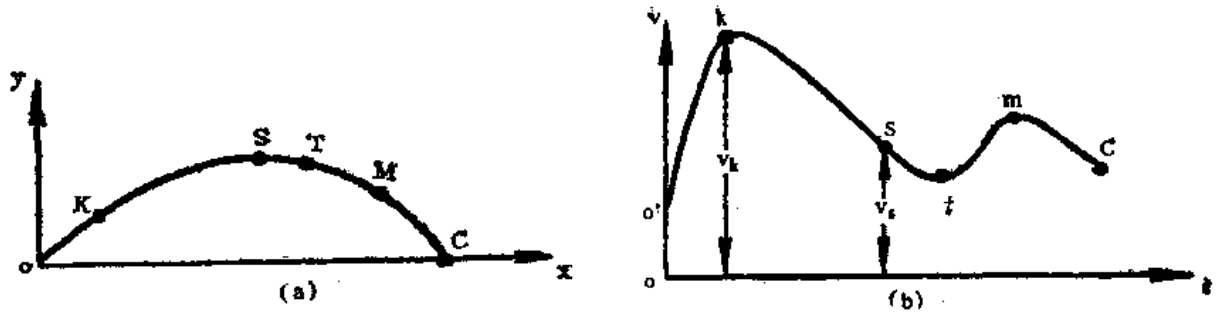


图 2-7　火箭弹道图

（a）弹道升弧及降弧图　　（b）弹丸速度变化图

在升弧段上，$\varphi+\varepsilon>0$ 故 $\sin(\varphi+\varepsilon)>0$。而 C、$H_\tau(y)$、$G(V_\tau)$、V 和 g 都是大于零的数，所以 $CH_\tau(y)\,G(V_\tau)V>0$，$g\sin(\varphi+\varepsilon)>0$。故得

$$\frac{dV}{dt}<0\text{。}$$

因此在图 2-7（a）弹道升弧段 KS 上，弹丸速度始终减小。如图 2-7（b）中速度曲线的 KS 段。

至弹道顶点 S，$\varphi+\varepsilon=0$，则 $\sin(\varphi+\varepsilon)=0$，故

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_s=-CH_\tau(y_s)\,G(V_\tau)\,V<0,$$

速度将继续减小。

过顶点后，$\varphi+\varepsilon<0$，故 $g\sin(\varphi+\varepsilon)=-g\sin|\varphi+\varepsilon|$。在

$$CH_\tau(y)\,G(V_\tau)V>g\sin|\varphi+\varepsilon|$$

以前，$\frac{dV}{dt}$ 仍为负值，故速度继续减小。

过顶点后，在图 2-7（a）弹道降弧上的某一点 T 处出现

$$CH_\tau(y)\,G(V_\tau)V=g\sin|\varphi+\varepsilon|$$

时，

$$\frac{dV}{dt}=0$$

故速度达极小值 V_{min}。

过速度极小值点，$|\varphi+\varepsilon|$ 继续增大，$g\sin(\varphi+\varepsilon)$ 也继续增大，因而

$$g\sin|\varphi+\varepsilon|>CH_\tau(y)\,G(V_\tau)V\text{。}$$

即 $\frac{dV}{dt}>0$，故以后速度又开始增大，如图 2-7（b）中速度曲线的 tm 段。

又阻力函数 $G(V_\tau)$ 是速度 V 的增函数，且比重函数 $H_\tau(y)$，在降弧段上其值也在增大，因而又会出现 $\frac{dV}{dt}=0$。即速度增大后，又有可能出现 $\frac{dV}{dt}=0$，这是因为 $CH_\tau(y)G(V_\tau)V$ 项在增加。所以在弹道某一点 M 上再次达到极值点，如图 2-7（b）速度曲线的点 m。过后速度将不断再减小，这是由于 $\sin(\varphi+\varepsilon)$ 值在 $|\varphi+\varepsilon|\to 90°$ 过程中，$\sin(\varphi+\varepsilon)$ 项的增量愈来愈小；而前项中 $H_\tau(y)$ 在愈近地面增加愈快，虽然速度减小时 $G(V_\tau)V$ 也在减小，但仍出现

$$CH_\tau(y)\,G(V_\tau)V>g\sin|\varphi+\varepsilon|,$$

即$\frac{dV}{dt}<0$，即速度不断减小，如图 2-7(b) 中速度曲线的 mc 段。

火箭弹速度沿全弹道的变化如图 2-7(b) 所示。

炮弹的空气弹道与炸弹弹道的速度沿全弹道变化，分别如图 2-8 与图 2-9 所示，其分析方法相同。主要特点在于：炮弹相当于只有火箭弹道的被动段而没有主动段，因而速度变化曲线与火箭弹速度曲线的 $Kstmc$ 相似，又初速是 V_{01} 而不是 V_K；对于炸弹，一般采用水平轰炸，因而它只有弹道的降弧段，更没有主动段，所以速度变化曲线与火箭弹速度曲线中 $stmc$ 段相似，而且其初速为 V_1，即飞机投弹瞬间的速度。

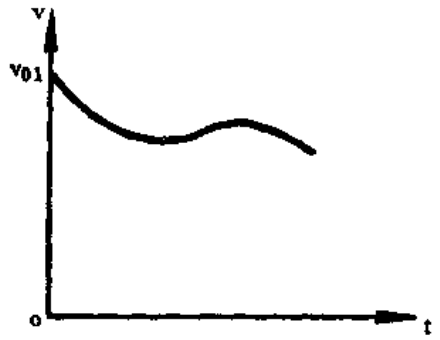


图 2-8 炮弹丸弹道速度变化图

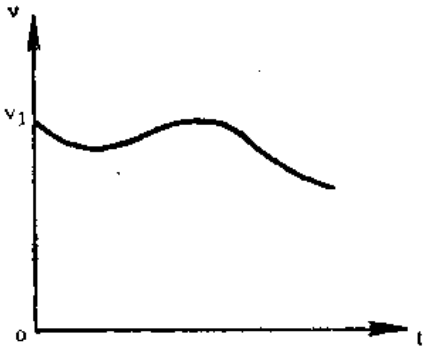


图 2-9 炸弹弹道速度变化图

二、空气弹道的不对称性

真空弹道是抛物线弹道，它相对于 $x=x_s=\frac{x}{2}$ 的铅直线是对称的。而空气弹道因受空气阻力作用的影响，不再对称。而且随着弹道系数的增大，其不对称性愈来愈显著。图 2-10 所示，为 $V_0=1000$ 米/秒、$\theta_0=45°$ 时的大口径（设 $C=0.3$）、中口径（设 $C=1.0$）、小口径（设枪弹的 $C=0.6$）弹丸的弹道与接近真空弹道（$C=0.1$）相比的情况。

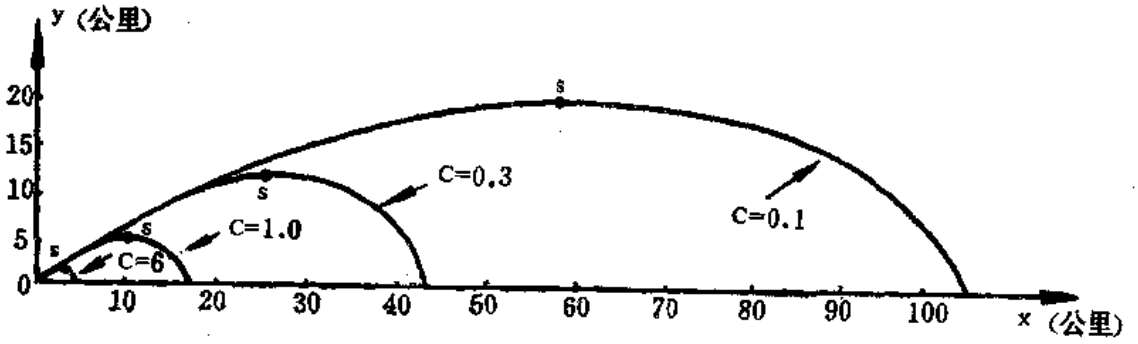


图 2-10 不同弹道系数时的弹道比较图

现讨论空气弹道不对称性的几个方面

1．空气弹道降弧比升弧陡，

即：$$|\theta_x|>\theta_a, \quad |\theta_c|>\theta_c$$

设弹道升弧上点 a 与弧降上点 d 等高（图2-11）。将方程组（2-21）中的②式变为

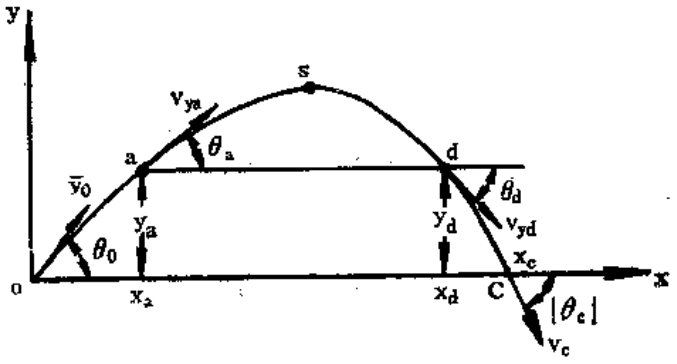


图 2-11　空气弹道的降弧比升弧陡

$$dP = -\frac{g}{U^2 P}dy,$$

两边同乘以 $2P$ 得

$$2PdP = -\frac{2g}{U^2}dy。$$

将上式积分两次，一次自点 a 积分到顶点 s。

$$\int_{P_a}^{0} 2PdP = -2g\int_{y_a}^{y}\frac{dy}{U^2} \quad 即 \quad P_a^2 = 2g\int_{y_a}^{y}\frac{dy}{U^2}。$$

另一次由顶点 s 积分到降弧点 d。

$$\int_{0}^{P_d} 2PdP = -2g\int_{y_d}^{y}\frac{dy}{U^2} \quad 即 \quad P_d^2 = 2g\int_{y_d}^{y}\frac{dy}{U^2}。$$

由于水平分速沿全弹道减小，即

$$U_a > U_d,$$

所以

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{U_a^2} < \int_{y_d}^{y}\frac{dy}{U_d^2}。$$

因而

$$P_a^2 < P_d^2。$$

$$\left.\begin{aligned} P_a &< |P_d| \\ \theta_a &< |\theta_d| \\ \theta_0 &< |\theta_c| \end{aligned}\right\} \tag{2-22}$$

2. $x_a < \frac{X}{2}$

由方程组（2-21）中的③式

$$dx = \frac{dy}{P},$$

同样分别积分两次

$$x_a - x_0 = \int_{y_0}^{y}\frac{dy}{P_a},$$

$$x_d - x_a = \int_{y}^{y_d}\frac{dy}{P_d} = \int_{y_d}^{y}\frac{dy}{|P_d|}。$$

由于

$$|P_d|>P_a,$$

所以

$$\int_{y_a}^{y}\frac{dy}{P_a}>\int_{y_d}^{y}\frac{dy}{|P_d|}。$$

因而

$$x_a^{真}-x_a>x_d-x_d^{真}。$$

当 $x_a=0$ 时，$x_d=X$

故

$$x_s>\frac{X}{2}。\qquad(2\text{-}23)$$

根据经验知：$x_s=(0.5\sim0.7)X$。真空弹道 $x_s^{真}=0.5X$；大中口径弹丸的弹道 $x_s\approx0.55X$；而枪弹 $x_s\approx(0.65\sim0.7)X$。

3. $t_s<\frac{T}{2}$

由方程组（2-20）中的③式得

$$dt=\frac{dy}{UP}=\frac{dy}{W}。$$

同样办法积分两次，得

$$t_s-t_a=\int_{y_a}^{y}\frac{dy}{W_a},$$

$$t_d-t_s=\int_{y}^{y_d}\frac{dy}{W_d}=\int_{y_d}^{y}\frac{dy}{|W_d|}。$$

由于 $|W_d|<W_a$，

故得 $t_s-t_a<t_d-t_s$。

即 $t_s<\frac{t_a+t_d}{2}$。

当 $t_a=0$ 时，$t_d=T$，故得

$$t_s<\frac{T}{2}。$$

根据经验，t_s 在 $(0.4\sim0.5)T$ 范围内变化。枪弹接近前者；大中口径弹丸，t_s 在 $0.45T$ 左右；而真空弹道 $t_s=T/2$。

三、空中射击弹道完全由 C、H、V_{01}、θ_{01} 来确定

观察方程组（2-10）及其联系方程与初始条件。积分这组方程组的结果 U、W、ξ、η 为自变量 t 的函数。除此之外，还决定于方程组、联系方程及初始条件中的各个常数，即弹道系数 C、射击高度 H、初始速度 V_{01} 和初始射角 θ_{01}（由高低角 ε 与抬高角 α 之和来决定）。当 C、V_{01}、H、θ_{01} 确定后，弹道也就完全确定了。

以同样方法分析轰炸弹道，可得如下结论：

1. 水平轰炸弹道可由 C、H 及 V_1 完全确定；

2．俯冲轰炸弹道则由C、H、V_1及λ完全确定。

第二章　习　　题

2-1， 怎样列写质心运动微分方程式，试总结其步骤及方法。

2-2， 不同坐标轴系及不同自变量的选取，各适用于解什么弹丸的弹道以及适用于什么场合？

2-3， 试总结改换自变量的方法，从而做到记忆准确。

2-4， 以炮弹丸弹道为例，分析速度沿全弹道的变化及变化的原因。

第三章　航空外弹道的数值计算法

§1 引　　言

在外弹道学中，研究弹丸在空间的运动，为了突出问题的主要方面使其大大简化，我们通常将弹丸运动看成是质心运动。在这一假设的大前提下，前面在第二章里已列出了不同坐标系的质心运动的微分方程组(2-7)、(2-10)、(2-11)～(2-14)及(2-17)～(2-21)式，这些运动的方程组有一些共同的特点：

(1)、方程组中的各方程式需要联立求解；

(2)、方程式中的一些函数如高度函数 $H(y)$ 和西亚切阻力定律的阻力函数 $G(V_c)$ 等，都不是用明显的解析式来表示，而是以表格函数的形式给出的；

(3)、在弹道的计算方面，都是在一定精度的条件下，要求能计算出弹道上任意一点的弹道诸元，其结果通常也是以表格的形式得出相应的弹道表。

实际求解运动方程组的方法，归结起来就是数值计算方法——数值积分法。常用的数值积分法有欧拉法、差分法、龙格—库塔法和阿当姆斯法等。

此外，与表格函数有关的计算法如插值法和曲线拟合等，在弹道计算时也是常用的。

这一章我们主要介绍：(1)插值与拟合；(2)差分法；(3)常微分方程(组)初值问题的数值解法(欧拉法、龙格—库塔法和阿当姆斯法)。

§2 插值与曲线拟合

一、插值

在实际中遇到的函数，有许多和弹道函数一样是表格形式给出的。譬如通过实验观测，得出了某个函数 $y=f(x)$ 在一系列点 x_0，x_1，x_2，……上的函数值 y_0，y_1，y_2，……，但对应于 x 其它值的函数值是未知的。这种表格函数，不便于分析其性质和变化规律，特别是不能直接求出表中没有列出的点处的函数值。因此，我们常希望能找到这种表格函数的一个近似函数表达式。

插值法就是寻求函数近似表达式的一种方法。当然，我们可以用各种各样的初等函数来近似原来的表格函数。但是，由于代数多项式函数最简单，计算其函数值只需用加、减乘等运算，且微分和积分也很方便，所以常用它来近似地表达复杂的函数或表格函数。这样的插值方法叫代数插值法。我们只讨论在弹道计算中常用的代数插值法，简称插值法。

插值法主要研究求插值多项式及其余项的方法。

1. 插值的概念

设函数 $y=f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数，已知它在 $[a, b]$ 上 $n+1$ 个互不相同的

点 x_0，x_1，x_2，……，x_n 上取值 y_0，y_1，y_2，……，y_n，即 $y_i=f(x_i)(i=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$。如果有代数多项式 $P(x)$ 在点 x_i 处满足 $P(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots\cdots,\ n)$，则称 $P(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的插值多项式函数（简称插值函数）。x_0，x_1，……，x_n，称为插值结点。在插值结点处两者的函数值相等。$y=f(x)$ 可以是一般函数，也可以是表格函数，通常称为被插值函数。插值法就是要求出满足上述条件的多项式函数 $P(x)$。可以证明：用 $n+1$ 插值结点，可以作出一个次数不超过 n 的插值多项式。

插值法的几何意义，就是通过 $n+1$ 个点：$(x_0,\ y_0)$，$(x_1,\ y_1)$，……，$(x_n,\ y_n)$ 作一条代数曲线 $y=P(x)$，近似于曲线 $y=f(x)$，如图 3-1 所示。

由上述的插值法定义可知，在区间 $[a,\ b]$ 上用 $y=P(x)$ 近似 $y=f(x)$，在插值结点 x_i 上有 $f(x_i=P(x_i)$，而在 $[a,\ b]$ 上的其它点 x 上就会有误差。令

$$R(x)=f(x)-P(x),$$

$R(x)$ 称为插值多项式的余项，它表示用 $P(x)$ 近似 $f(x)$ 的截断误差的大小。一般说来，$|R(x)|$ 越小，则近似程度就越好。

2. 线性插值与二次插值

已知函数 $y=f(x)$ 在点 x_0、x_1 的值为 y_0、y_1，要求多项式 $y=P_1(x)$，使其满足 $P_1(x)=y_0$，$P_1(x_1)=y_1$。其几何意义就是求通过两点 $A(x_0,\ y_0)$ 与 $B(x_1,\ y_1)$ 的一条直线，如图 3-2 所示。

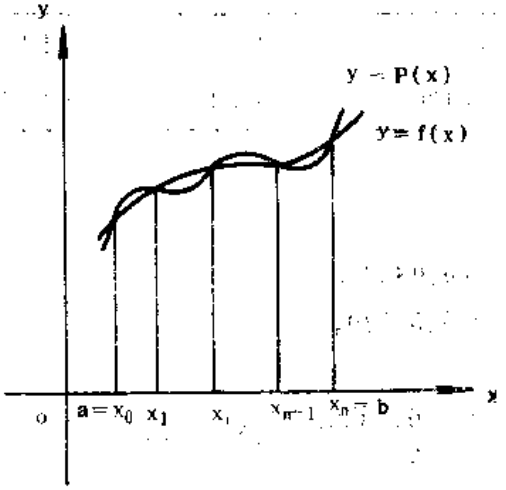


图 3-1 插值的几何意义图

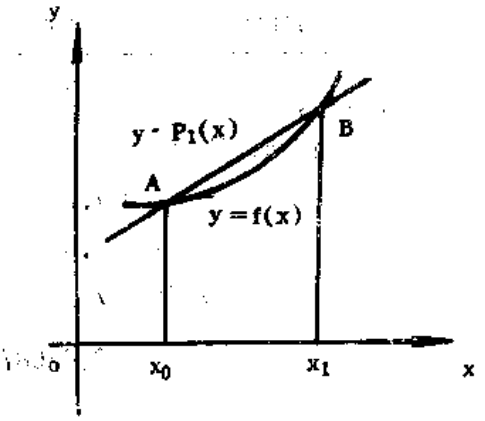


图 3-2 线性插值图

由解析几何可知，通过 A、B 两点的直线方程为

$$y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)=P_1(x) \tag{3-1}$$

将上式经过整理，可以改写成

$$P_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1 \tag{3-2}$$

这样的 $P_1(x)$ 一般是 x 的一次多项式，即一次函数。这种插值，称为线性插值。

在区间 $[x_0,\ x_1]$ 上用 $y=P_1(x)$ 作为 $y=f(x)$ 的近似表达式，其余项为

$$R_1(x)=f(x)-P_1(x)$$

在查用平方根表、三角函数表、对数表等求函数值时，常常用到线性插值。在航空方面，也常用到。

例 3-1 某一飞机模型进行风洞吹风试验，对一定的攻角 α，测得不同马赫数 M 所对应的阻力系数 C_x 值如下表：

M	0.527	0.727	0.807	0.927	0.973
C_x	0.01075	0.01219	0.01188	0.01426	0.01668

试求 $M=0.7$ 时，C_x 的值。

解：用线性插值，这里

$$x_0=0.527, \qquad y_0=0.01075;$$

$$x_1=0.727, \qquad y_2=0.01219。$$

$$C_x(0.7)=P_1(0.7)=0.01075+\frac{0.01219-0.01075}{0.727-0.527}(0.7-0.527)$$

$$=0.01075+0.0072\times0.173$$

$$\approx0.01075+0.00125=0.01200$$

例 3-2 某一航弹模型进行吹风试验，对于攻角为零时，测得不同 M 数所对应的阻力系数 C_{x0} 值如下表：

M	0.5	0.7	0.8	0.9	1.0
C_{x0}	0.09493	0.08687	0.09070	0.09495	0.13250

试求 $M=0.75$ 时，$C_{x0}=?$

解：用线性插值，这里

$$x_0=0.7, \qquad y_0=0.08687;$$

$$x_1=0.8, \qquad y_1=0.09070。$$

$$C_{x0}(0.75)=P_1(0.75)$$

$$=0.08687+\frac{0.09070-0.08687}{0.8-0.7}(0.75-0.7)$$

$$=0.08687+0.0383\times0.05$$

$$\approx0.08687+0.00192$$

$$=0.08879$$

线性插值只用到两个已知点 x_{i-1} 和 x_i 处的函数值 y_{i-1} 和 y_i，求得 $y=f(x)$ 的近似值，计算简单但误差较大。我们设想，如果多用一些已知点的函数值来求 $y=f(x)$ 的近似值，其结果的准确度可能会好些。

设已知 $y=f(x)$ 在 x_0、x_1、x_2 上的值为 y_0、y_1、y_2，这时我们求作一个二次多项式 $y=P_2(x)$，使 $P_2(x_i)=y_i$，$(i=0,\ 1,\ 2)$。其几何意义就是用通过三点 $(x_0,\ y_0)$，$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ 所作的抛物线来近似曲线 $y=f(x)$，如图 3-3 所示。因此，二次插值亦称抛物线插值。

现在，反过来看一下线性插值的对称表达式（3-2）。令

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\quad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0},$$

可得 $P_1(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1$ (3-3)

当 $x=x_0$ 时，$l_0(x_0)=1$，$l_1(x_0)=0$；当 $x=x_1$ 时，$l_0(x_1)=0$，$l_1(x_1)=1$，即得 $P_1(x_0)=y_0$，$P_1(x_1)=y_1$。

再进一步考察通过三点，$(x_0,\ y_0)$，$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ 且满足 $P_2(x_0)=y_0$、$P_2(x_1)=y_1$、$P_2(x_2)=y_2$ 的抛物线插值，从而得出相应的二次多项式 $P_2(x)$。

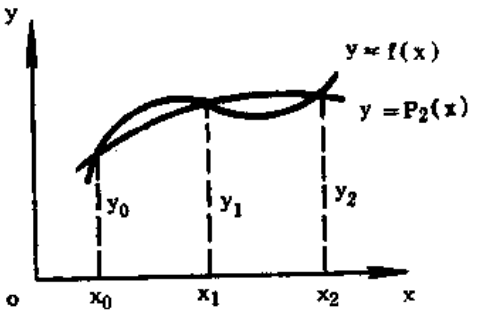


图 3-3 二次插值图

我们完全可以假设二次插值的线性组合表达式为

$$P_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2 \tag{3-4}$$

满足插值条件 $P_2(x_0)=y_0$，必有 $l_0(x_0)=1$，$l_0(x_1)=0$，$l_0(x_2)=0$，由此可知 $l_0(x)$ 就有两个根 x_1 和 x_2，令

$$l_0(x)=\lambda(x-x_1)(x-x_2)$$

当 $x=x_0$ 时，$l_0(x_0)=1=\lambda(x_0-x_1)(x_0-x_2)$，则确定其中的系数 λ 为

$$\lambda=\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

结果得到

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

类似地，根据插值条件 $P_2(x_1)=y_1$、$P_2(x_2)=y_2$，作出满足以下条件

$$l_1(x_0)=0,\ l_1(x_1)=1,\ l_1(x_2)=0$$

与

$$l_2(x_0)=0,\ l_2(x_1)=0,\ l_2(x_2)=1$$

的插值基本式 $l_1(x)$ 和 $l_2(x)$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

将 $l_0(x)$、$l_1(x)$、$l_2(x)$ 代入 (3-4)，得到

$$P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 \tag{3-5}$$

这样的 $P_2(x)$ 叫做二次插值多项式，利用 (3-5) 式进行插值，就称为二次插值（或抛物线插值）。

用 $P_2(x)$ 作 $f(x)$ 的插值函数，其余项为

$$R_2(x)=f(x)-P_2(x)$$

一般地说，二次插值比线性插值的准确程度要好些，但手算时比线性插值繁些。

例 3-3 由例3-2某一航空炸弹模型进行吹风实验所给出 $C_{x0}(M)$ 的函数表，用二次插值

求 $C_{\pi 0}(0.75)$ 的近似值。

解：用二次插值，这里 $x=0.75$，

$$x_0=0.7,\qquad y_0=0.08687;$$
$$x_1=0.8,\qquad y_1=0.09070;$$
$$x_2=0.9,\qquad y_2=0.09495。$$

由 (3-5) 式得

$$C_{\pi 0}(0.75)=P_2(0.75)=\frac{(0.75-0.8)(0.75-0.9)}{(0.7-0.8)(0.7-0.9)}\times$$
$$0.08687+\frac{(0.75-0.7)(0.75-0.9)}{(0.8-0.7)(0.8-0.9)}\times 0.09070+$$
$$\frac{(0.75-0.7)(0.75-0.8)}{(0.9-0.7)(0.9-0.8)}\times 0.09495\doteq 0.08873$$

3. 拉格朗日插值多项式

仿照线性插值和二次插值所采用的办法，我们仍从构造插值基本式着手，可令

$$P_n(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+\cdots\cdots+l_n(x)y_n \tag{3-6}$$

当满足条件

$$l_K(x_i)=\begin{cases}0 & (i\neq K)\\ 1 & (i=K)\end{cases}$$

与

$$P_n(x_i)=\sum_{K=0}^{n}l_K(x_i)\cdot y_K=y_i \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots n)$$

时，令 $l_K(x)=\lambda(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{K-1})(x-x_{K+1})\cdots\cdots(x-x_n)=\lambda\prod_{\substack{j=0\\ j\neq K}}^{n}(x-x_j)$

再利用 $l_K(x_K)=1$，来确定系数 λ，即

$$l_K(x_K)=\lambda\prod_{\substack{j=0\\ j\neq K}}^{n}(x_K-x_j)=1$$

$$\therefore\quad \lambda=\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq K}}^{n}(x_K-x_j)}$$

因而可得

$$l_K(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq K}}^{n}\frac{x-x_j}{x_K-x_j} \tag{3-7}$$

则由 (3-6) 式，并将 (3-7) 代入就有

$$P_n(x)=\sum_{K=0}^{n}l_K(x)\cdot y_K$$
$$=\sum_{K=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq K}}^{n}\frac{x-x_j}{x_K-x_j}\right)\cdot y_K \tag{3-8}$$

公式(3-8)就是所谓拉格朗日(Lagrange)插值公式。

在给定点x，用插值公式(3-8)计算$P_n(x)$的值作为函数$f(x)$在点x处的近似值，这个过程称作拉格朗日插值。插值多项式的次数称作插值的阶。点x称作插值点。如果插值点x位于插值区间内，这种插值过程称内插，否则，称作外推。

拉格朗日插值公式(3-8)在逻辑结构上表现为二重循环，特别适于用电子计算机来运算。内循环（j循环）由累乘求得系数

$$l_K(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq K}}^{n}\frac{x-x_j}{x_K-x_j}$$

然后，再通过外循环（K循环）由累加得到结果

$$y\approx P_n(x)=\sum_{K=0}^{n}l_K(x)\cdot y_K$$

下面分别用BASIC语言和FORTAN语言写出拉格朗日插值的过程说明：

1) BASIC 程序

```
1100    REM         LAGRANGE
1105    READ        N, M
1115    DIM         X(N), Y(N), U(M), V(M)
1120    AREAD       X, Y, U
1130    FOR         I=0 TO  M
1132    LET         V(I)=0
1135    FOR         K=0 TO  N
1140    LET         L=1
1145    FOR         J=0 TO  N
1150    IF          J=K THEN 1160
1155    LET         L=L*(U(I)-X(J))/(X(K)-X(J))
1160    NEXT        J
1165    LET         V(I)=V(I)+L*Y(K)
1170    NEXT        K
1175    NEXT        I
1180    APRINT      V
1185    RETURN
```

参量说明：

a、简单变量

N——给定的插值结点个数减一；

M——要插值的函数个数减一。

b、数组

X(N)——存放给定的插值结点值；

Y(N)——存放给定插值结点上的函数值；

U(M)——存放被插值的各点值；

V(M)——存放插值结果。

该程序中的 1120 和 1180 语句分别为数组读入和数组打印语句（国产 DJS-21 机有这个功能）。

c、在调用程序的数据语句中，按数据排列的对应顺序给出数值后，由转子语句 GOSUB 1100 调用本程序。

例 3-4 某一航空炸弹模型经过风洞实验，测得如下函数表：

M	0.5	0.7	0.8	0.9	1.0
C_{x0}	0.09493	0.08687	0.09070	0.09495	0.13250

试求M分别为 0.54、0.6、0.75、0.78、0.82、0.86、0.93 和 0.97 的 C_{x0} 值。

主程序（调用程序）：

```
 5    DATA    4, 7
10    DATA    0.5, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0
15    DATA    0.09493, 0.08687, 0.09070, 0.09495, 0.13250
20    DATA    0.54, 0.6, 0.75, 0.78, 0.82, 0.86, 0.93, 0.97
25    GOSUB   1100
30    END
```

第 25 号语句 GOSUB 1100 是转子语句，起着调用上述拉格朗日插值程序（见45页）的作用，其计算结果略。

2) FORTRAN 程序①

```
      SUBROUTINE  LAGR(XO, YO, N, X, Y)
      DIMENSION   XO(N), YO(N)
      Y=0.0
      DO 30 K=1, N
      P=1.0
      DO 20 J=1, N
      IF(K-J) 10, 20, 10
10    P=P*(X-XO(J))/(XO(K)-XO(J))
20    CONTINUE
30    Y=Y+P*YO(K)
      RETURN
      END
```

说明：

a、子程序语句 SUBROUTINE LAGR(XO, YO, N, X, Y)

b、形参

XO——一维数组，存放给定的插值结点值；

YO——一维数组，存放插值结点上的函数值；

① FORTRAN 语言的程序，按西北工业大学计算中心的 Felix C-256 机的规定来编写的，下同。

N——变量，结点个数；

X——变量，被插值的各点值；

Y——变量，插值结果。

例 3-5　已知下列列表函数：

x_0	0.0	0.1	0.195	0.3	0.401	0.5
y_0	0.39894	0.39695	0.39142	0.38138	0.36812	0.35206

计算 $x=0.15$，0.3，0.45 时的函数值。

```
      DIMENSION  XO(6), YO(6)
      READ (105, 1) XO, YO
    1 FORMAT (6F5.3, 6F7.5)
      X=0.15
   10 CALL LAGR (XO, YO, 6, X, Y)
      WRITE (108, 2) X, Y
    2 FORMAT (1X, 2F7.5)
      X=X+0.15
      IF (X.LE.0.45) GO PO 10
      SPOP
      END
```

数组 XO 的元素存放顺序为0.0，0.1，0.195，0.3，0.401，0.5；数组YO的元素存放顺序为 0.39894，0.39695，0.39142，0.38138，0.36812，035206 。

计算结果：$y(0.15)=0.39447$，$y(0.3)=0.38138$，$y(0.45)=0.36052$。

4. 分段插值法

利用拉格朗日插值公式，适当地提高插值多项式的次数，可以改善精度。但是次数太高又会产生不好的效果。因为次数越高，计算越繁，积累误差大；曲线出现过多的扭摆；当局部插值结点有微小变动时，就可能引起曲线大幅度的变化，使计算很不稳定。因此，在实际进行插值时，常常将插值区间分为若干小段，在每一小段上使用低次插值——如线性插值或抛物插值。这就是所谓分段插值法。

设已给定 $n+1$ 个插值结点 $x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n$ 所对应的函数值 y_0，y_1，y_2，……，y_n，要计算点 x 处的函数值 $y(x)$。取三个点 x_{i-1}，x_i，x_{i+1} 进行分段抛物插值，可按下列公式计算

$$y=\sum_{K=i-1}^{i+1}\left(\prod_{\substack{j=i-1\\ j\neq K}}^{i+1}\frac{x-x_j}{x_K-x_j}\right)\cdot y_K \tag{3-9}$$

或者

$$y=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}\cdot y_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}\cdot y_i$$

$$+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}\cdot y_{i+1} \tag{3-10}$$

为了使插值误差较小，要求选取的三个插值结点距 x 最近。为此，可按如下方式确定插

值结点：

a、如果 x 位于 x_{s-1} 和 x_s 之间

i) x 靠近 x_{s-1}，即 $|x-x_{s-1}|\leqslant|x-x_s|$，应再补选第三结点 x_{s-2}，令(3-10)式中的 $i=s-1$；

ii) x 靠近 x_s，即 $|x-x_s|<|x-x_{s-1}|$，应补选第三结点为 x_{s+1}，令(3-10)式中的 $i=s$。

b、如果靠近表头，即 $x\leqslant x_1$ 时，选 x_0、x_1、x_2 为插值结点，令 $i=1$。

c、如果 x 靠近表尾，即 $x>x_{n-1}$ 时，选 x_{n-2}、x_{n-1}、x_n 为插值结点，令 $i=n-1$。

归结起来则按下列规律选择插值结点：

$$i=\begin{cases}1 & \text{当 } x\leqslant x_1 \text{（靠近表头），}\\ s-1 & \text{当 } x_{s-1}\leqslant x<x_s,\ |x-x_{s-1}|\leqslant|x-x_s|,\\ s & \text{当 } x_{s-1}<x\leqslant x_s,\ |x-x_{s-1}|>|x-x_s|,\\ n-1 & \text{当 } x>x_{n-1} \text{（靠近表尾）。}\end{cases}$$

$$(s=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$$

式(3-10)称为拉格朗日一元三点公式。其插值的简单框图，如图 3-4 所示。

下面用 FORTRAN 语言写出分段插值法的程序：

```
      SUBROUTINE LAQ(N,
     &  L, X, A, B, Y)
      DIMENSION  A(N),
     &  B(N, L), Y(L)
      N1=N-2
      DO 1 I=1, N1
      IF (X.LE.A(I+1))
     &  GO TO 2
    1 CONTINUE
      I=N-2
    2 IF(I.EQ.1) GO TO 3
      IF(X-A(I).GE.A(I+
     &  1)-X) GO TO 3
      I=I-1
    3 A1=A(I)
      A2=A(I+1)
      A3=A(I+2)
      U =(X-A2)*(X-A3)/((A1-A2)*(A1-A3))
      V =(X-A1)*(X-A3)/((A2-A1)*(A2-A3))
      W =(X-A1)*(X-A2)/((A3-A1)*(A3-A2))
      DO 4 J=1, L
    4 Y(J)=U*B(I, J)+V*B(I+1, J)+W*B(I+2, J)
```

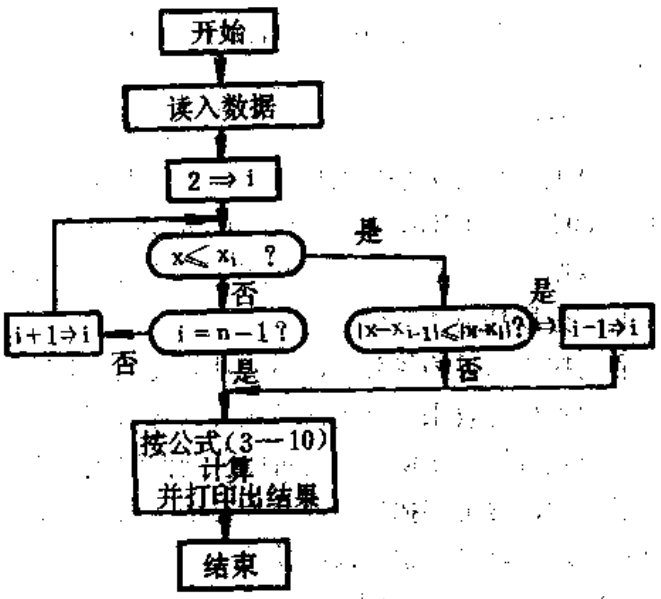


图 3-4 分段插值的简单框图

```
      RETURN
      END
```

说明：

a、由于FORTRAN语言规定，数组的下标值必须是大于等于1的正整数，不能为零，所以该程序是按下式，计算x点的函数值$y(x)$的。

$$y(x)=\sum_{K=i}^{i+2}\left(\prod_{\substack{j=i\\ j\neq K}}^{i+2}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)\cdot y_k$$

其中

$$\begin{cases} 1 & x\leqslant x_2\ , \\ s-1 & x_s\leqslant x<x_{s+1},\ x-x_s<x_{s+1}-x, \\ s & x_s<x\leqslant x_{s+1},\ x-x_s\geqslant x_{s+1}-x, \\ n-2 & x>x_{n-1}\ 。 \end{cases}$$

$$(S=2,\ 3,\ \cdots,\ n-2)$$

b、子程序语句

```
      SUBROUTINE LAQ (N, L, X, A, B, Y)
```

c、形参

N——结点个数 N≥3（整型变量）；

L——插值函数的个数；

A——*N*个元素的一维数组，存放给定的插值结点x_1，x_2……，x_n，且要求$x_i<x_{i+1}$，$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$；

B——$N\times L$个元素的二维数组，存放给定的插值结点处的*L*组函数值。排列顺序如下：

$y^{(1)}(x_1)$，$y^{(1)}(x_2)$，…，$y^{(1)}(x_n)$，$y^{(2)}(x_1)$，$y^{(2)}(x_2)$，…，$y^{(2)}(x_n)$，…，$y^{(I)}(x_1)$，$y^{(I)}(x_2)$，…，$y^{(I)}(x_n)$；

X——被插值的各点值；

Y——*L*个元素的一维数组，存放*L*个插值结果。

例 3-6 已知下列试验数据：

x	0.20	0.24	0.28	0.32	0.36	0.40
y_1	0.19867	0.23770	0.27636	0.31457	0.35227	0.38942
y_2	.80400	0.76576	0.72784	0.69024	0.65296	0.61600

计算$x=0.22$，0.26，0.30，0.34，0.38处的函数值。

数组*A*的元素存放顺序为：0.20，0.24，0.28，0.32，0.36，0.4；数组*B*的元素存放顺序为：0.19867，0.23770，0.27636，0.31457，0.35227，0.38942，0.80400，0.76576，0.72784，0.69024，0.65296，0.61600 。

自编主程序调用上述分段插值子程序，主程序如下：

```
      DIMENSION A( 6 ), B(6, 2), Y( 2 )
      READ (105, 1) A, B
```

```
    1  FORMAT (6F5.2, 6F7.5)
       DO  15  I=1, 5
       K=0
       X=0.22
   10  CALL  LAQ (6, 2, X, A, B, Y)
       WRITE (108, 20)X, Y
       X=X+0.04
       K=K+1
       IF (K.LT.5) GO TO 10
   15  CONTINUE
   20  FORMAT (1X, 2F 9.6)
       END
```

其计算结果列表如下：

x	0.22	0.26	0.30	0.34	0.38
y_1	0.218231	0.257086	0.295521	0.333484	0.370914
y_2	0.784840	0.746760	0.709000	0.671560	0.634440

二、曲线拟合

1. 问题的提出

在弹道的研究和计算中，时常需要从一组测定的数据去求函数 $y=f(x)$ 的近似表达

x_0	x_1	x_2	x_3	···	x_n
y_0	y_1	y_2	y_3	···	y_n

式。从图形上看，这个问题就是由曲线 $y=f(x)$ 上已给的 N 个点 (x_i, y_i)，$i=1, 2, \cdots, N$，求作该曲线的近似图形。我们所研究过的插值问题，属于这类问题。不过，插值问题要求近似曲线 $y=p(x)$ 要严格地通过所给的 N 个点 (x_i, y_i)，这一要求将会使近似曲线 $y=p(x)$ 保留数据的全部测试误差，如果个别数据的精度很差（即误差很大），那么，插值的效果显然是不理想的。鉴于这种情况，我们考虑放弃严格通过所有结点 (x_i, y_i) 这一要求，而采用别的方法去构造近似曲线，以尽可能反映所给数据的趋势。下面就介绍一种用所谓最小二乘法拟合数据的方法，拟合所用的函数，仍考虑用多项式。整个这套方法，称之为曲线拟合。

2. 曲线拟合

我们考虑 N 对数据 (x_i, y_i)，$(i=1, 2, \cdots\cdots, N)$，从这些数据找到一个近似的函数关系式 $y=\psi(x)$，取最简单的形式，把要求的函数 $y=\psi(x)$ 用 m 次代数多项式

$$y=\psi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_mx^m$$

$$=\sum_{j=0}^{m}a_jx^j \qquad (m<N) \qquad (3\text{-}11)$$

来表达。确定这个近似多项式，需要求（3-11）的系数值 $a_j(j=0,\ 1,\ \cdots m)$，使多项式(3-11)对于给出的数据（$x_i,\ y_i$）具有所谓“好的拟合”。

若把点（$x_i,\ y_i$）($i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$)代入多项式，就有N个方程：

$$\left.\begin{aligned} &a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_mx_1^m-y_1=R_1\\ &a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_mx_2^m-y_2=R_2\\ &\vdots\qquad\qquad\cdots\cdots\\ &a_0+a_1x_N+a_2x_N^2+\cdots+a_mx_N^m-y_N=R_N \end{aligned}\right\} \tag{3-12}$$

由于多项式曲线不一定通过所有的点（$x_i,\ y_i$）($i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$)，所以这些方程不会完全都等于零，即

$$\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j-y_i=R_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{3-13}$$

这样，我们就有N个误差方程（3-12）。

曲线拟合的最小二乘法，就是求这样的拟合曲线，使偏差 R_i 的平方和 $\sum_{i=1}^{N}R_i^2$ 达到最小值。

根据高等数学多元函数求极值的方法，令

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}R_i^2&=\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j-y_i\right]^2\\&=Q(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_m)\end{aligned} \tag{3-14}$$

则有

$$\frac{\partial Q}{\partial a_K}=2\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^j-y_i\right)\cdot x_i^K=0 \qquad (K=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^{j+K}-\sum_{i=1}^{N}y_i\cdot x_i^K=0$$

即

$$\sum_{j=0}^{m}a_j\sum_{i=1}^{N}x_i^{j+K}=\sum_{i=1}^{N}y_ix_i^K$$

引入

$$\sum_{i=1}^{N}x_i^K=S_K,\ \sum_{i=1}^{N}y_ix_i^K=T_K$$

可得

$$\sum_{i=1}^{N}x_i^{j+K}=S_{K+j}$$

$$\sum_{j=0}^{m}a_j\cdot S_{K+j}=T_K \qquad (K=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{3-15}$$

(3-15)式，称为正规方程组。这里是 $m+1$ 个方程，用来求解 $m+1$ 个未知数 $a_j(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，将求得的一系列系数代入（3-11），即得出所求的多项式。这个方

法，称为曲线拟合法。

在航空弹道的研究和计算中，曲线拟合法亦是一种将表格函数近似的构造成解析式的常用方法。

例 3-7　已知一组数据如下表第（2）、（3）列所示。

表 3-1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
i	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	$x_i^2y_i$	x_i^3	x_i^4
1	1	10	10	1	10	1	1
2	3	5	15	9	45	27	81
3	4	4	16	16	64	64	256
4	5	2	10	25	50	125	625
5	6	1	6	36	36	216	1296
6	7	1	7	49	49	343	2401
7	8	2	16	64	128	512	4096
8	9	3	27	81	243	729	6561
9	10	4	40	100	400	1000	10000
$\sum_{i=1}^{9}$	53	32	147	381	1025	3017	25317

求一个代数多项式较好地拟合这组数据。

解：按下列步骤求解：

1）根据所给数据描绘曲线草图，如图 3-5 所示。近似是一条抛物线；

2）造型　由略图近似的确定为二次抛物线，可设拟合曲线的方程为

$$y=\psi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

3）建立正规方程组并列表求

$$S_{K+j}=\sum_{i=1}^{9}x_i^{K+j}$$

和

$$T_K=\sum_{i=1}^{9}y_ix_i^K \qquad (j=0,\ 1,\ 2)$$

$$(K=0,\ 1,\ 2)$$

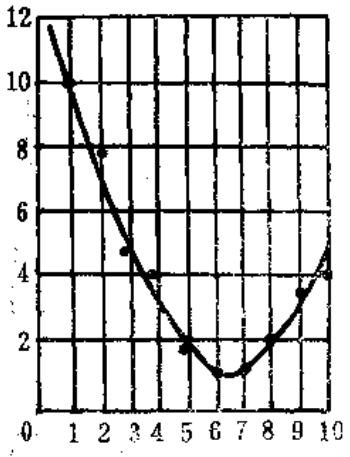


图 3-5　曲线拟合的草图

按（3-15）式，写出如下正规方程组

$$\left.\begin{aligned}S_0a_0+S_1a_1+S_2a_2&=T_0\\S_1a_0+S_2a_1+S_3a_2&=T_1\\S_2a_0+S_3a_1+S_4a_2&=T_2\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}16)$$

具体来说需要计算 S_0、S_1、S_2、S_3、S_4 及 T_0、T_1、T_2 各值：

$$S_0=\sum_{i=1}^{9}x_i^0=9;$$

$$S_1=\sum_{i=1}^{9}x_i=x_1+x_2+\cdots+x_9=53;$$

$$S_2=\sum_{i=1}^{9}x_i^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_9^2=381;$$

$$S_3=\sum_{i=1}^{9}x_i^3=x_1^3+x_2^3+\cdots+x_9^3=3017;$$

$$S_4=\sum_{i=1}^{9}x_i^4=x_1^4+x_2^4+\cdots x_9^4=25317。$$

和

$$T_0=\sum_{i=1}^{9}y_ix_i^0=\sum_{i=1}^{9}y_i=y_1+y_2+\cdots+y_9=32;$$

$$T_1=\sum_{i=1}^{9}y_ix_i=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_9y_9=147;$$

$$T_2=\sum_{i=1}^{9}y_ix_i^2=x_1^2y_1+x_2^2y_2+\cdots+x_9^2y_9=1025。$$

把这些计算结果分别列入表 5-1，并代入 (3-16) 可得

$$\left.\begin{aligned}9a_0+53a_1+381a_2&=32\\53a_0+381a_1+3017a_2&=147\\381a_0+3017a_1+25317a_2&=1025\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}17)$$

4) 求解正规方程组 (3-17) 得：

$$a_0=13.4597,\ a_1=-3.6053,\ a_2=0.2676$$

故所求的二次多项式为

$$y=\psi(x)=13.4597-3.6053x+0.2676x^2$$

例 3-8 已给一组实验数据

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	15.3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.8	117.6

求出一个经验公式和上表所给的数据相拟合。

解：1) 绘草图，近似指数曲线，如图 3-6 所示。

2) 造型

用形如

$$y=ae^{bx}\qquad(3\text{-}18)$$

的经验公式，去拟合所给数据 $(x_i,\ y_i)$ $(i=0,\ 1,\ \cdots N)$，其中 a、b 为待定系数。

对经验公式(3-18)的两边取常用对数

$$\lg y = \lg a + bx\lg e \qquad (3\text{-}19)$$

作代换 $u = \lg y$，$A = \lg a$，$B = b\lg e$，则(3-19)式写成

$$u = A + Bx$$

3) 建立正规方程组并列表计算 S_{K+j} 和 T_K

由方程组(3-15)，当 $j = 0$，1 和 $K = 0$，1 时，可得

$$\left.\begin{aligned} S_0A + S_1B &= T_0 \\ S_1A + S_2B &= T_1 \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}20)$$

式中，S_0、S_1，S_2 及 T_0、T_1 由下表计算。

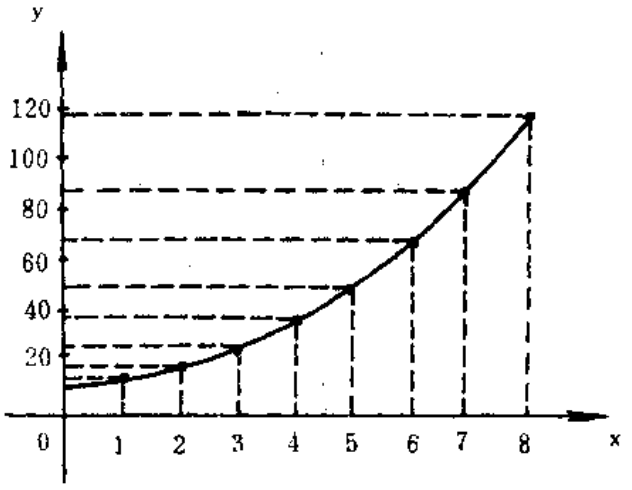


图 3-6 曲线拟合的举例图

i	x_i	y_i	$x_i^0u_i$	x_iu_i	x_i^2
1	1	15.3	1.1847	1.1847	1
2	2	20.5	1.3118	2.6236	4
3	3	27.4	1.4378	4.3134	9
4	4	36.6	1.5635	6.2540	16
5	5	49.1	1.6911	8.4555	25
6	6	65.6	1.8169	10.9014	36
7	7	87.8	1.9435	13.6045	49
8	8	117.6	2.0704	16.5632	64
$\sum_{i=1}^{8}$	$S_1 = 36$	—	$T_0 = 13.0197$	$T_1 = 63.9003$	$S_2 = 204$

并代入方程组(3-20)得

$$\left.\begin{aligned} 8A + 36B &= 13.0197 \\ 36A + 204B &= 63.9003 \end{aligned}\right\}$$

解得

$$A = 1.05836, \quad B = 0.12647 \text{。}$$

由于 $\lg a = A = 1.05836$ 和 $b = \dfrac{B}{\lg e} = \dfrac{0.12647}{0.43429}$，求出 $a = 11.44$，$b = 0.2912$，则有经验公式(3-18)为

$$y = 11.44e^{0.2912x}$$

如果变量 y 与多个变量 x_1，x_2，……，x_i 有密切关系，通过 i 次观测，y 获得了数据 y_i，而对 x_K 获得了数据 x_{iK}，参见下表。

观测次数	x_1	x_2	$\cdots$	x_l	y
1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1l}	y_1
2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2l}	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nl}	y_n

如果数学模型选择为关于 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的线性组合，即

$$y \approx \hat{y} = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_lx_l$$

运用最小二乘法来确定 C_i 就是使

$$\sum_{i=1}^{n} R_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - C_1x_{i1} - C_2x_{i2} \cdots - C_lx_{il})^2$$

$$= I(C_1, C_2, \cdots, C_l) = \min$$

如果记

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X_K = \begin{pmatrix} x_{1K} \\ x_{2K} \\ \vdots \\ x_{nK} \end{pmatrix}, \quad K = 1, 2, \cdots, l \text{ 。}$$

其相应的 n 维空间最佳逼近（拟合）的提法是，假设Φ为由 $X_1, X_2, \cdots, X_l$ 线性组合组成的子集，那么它与最小二乘法的等价说法是，在子集Φ上寻找一向量使它为Y的最佳逼近。

顺便指出，用 l 个独立变量的实函数去拟合一个点集，可采用电子计算机编程或调用数学库（譬如超面拟合等）去完成，具体实施可查阅有关资料。

§3 差分法

前面我们曾经指出：在弹道的数值积分解法中，包括有差分法，差分法是数值积分法中采用手算或电键式计算机计算的一种较好的方法。它可以用较大的间隔迅速地求得较为准确的结果。在大、中型数字电子计算机出现后，由于差分法计算较繁，所以现在在弹道计算上常用龙格——库塔法来求解弹道的微分方程组（这方面的具体内容，将在第八章予以介绍）。但是，差分法仍然有其特殊的作用。这是因为：1、对于少量的弹道计算用差分法手算或用电键式计算机计算可省去编写复杂的计算程序；2、在应用数字电子计算机时，对计算结果的检查和计算程序的调整等，有时仍需要用差分法以手算进行校核。

数值积分法的关键，在于建立一个通过若干所给定点的、比较简便的经验函数——插值函数，来代替通过各给定点的真实函数。在求得了这个插值函数以后，就可通过插值函数进行所需的插值问题、微分问题、积分问题和解微分方程等等。这就比直接用真实函数来进行一系列运算来得简便易行。各种数值积分法的主要区别在于所用插值函数公式的不同。

一、差分法的数学基础

1. 差分和差分表

我们在研究线性插值时，曾在（3-1）式中出现过形如$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$的比值项，这个比值的含义就是函数$y=f(x)$在区间$[x_0, x_1]$上的平均变化率（又称为一阶均差或差商）。同样对二次插值也可从（3-5）导出形如$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$，$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$的项，它们都是一阶均差。在均差概念的基础上，我们可以得到均差插值多项式（不作推导）

$$f(x)\approx f(x_0)+f(x_0, x_1)(x-x_0)+f(x_0, x_1, x_2)(x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\cdots+f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (3\text{-}21)$$

其中$f(x_0, x_1)$，$f(x_0, x_1, x_2)$，……，$f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$分别代表$f(x)$的一阶均差、二阶均差以及n阶均差值。

在均差插值公式（3-21）中，插值结点x_0，x_1，……，x_n之间的距离可以是不相等的。当插值结点等距分布时，表达函数的变化率就不必用均差，可改用差分。设相邻两插值结点间的距离均相等（令间隔为h，如图3-7所示），则有x_0，$x_1=x_0+h$，$x_2=x_1+h$，……，$x_n=x_{n-1}+h$，$x_{n+1}=x_n+h$，……，并设函数$y=f(x)$在各插值结点上的值为y_0，y_1，……，y_{n+1}…。我们就可得到与相邻两插值结点相应的两个函数值的增量

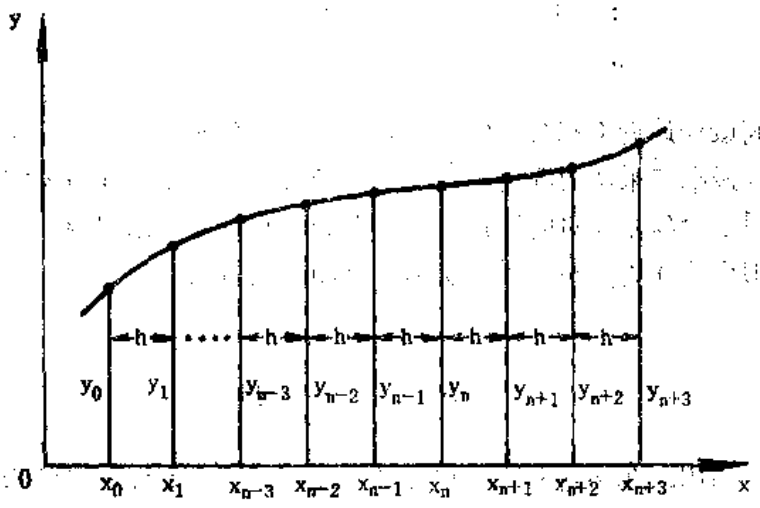


图 3-7 有限差分图

$$\triangle y_0=y_1-y_0,\ \triangle y_1=y_2-y_1,\ \cdots\cdots,\ \triangle y_n=y_{n+1}-y_n$$

叫做该函数$f(x)$的一阶差分。一阶差分的差分，叫做该函数的二阶差分。记为

$$\triangle^2 y_0=\triangle y_1-\triangle y_0,\ \triangle^2 y_1=\triangle y_2-\triangle y_1,\ \cdots\cdots,$$
$$\triangle^2 y_n=\triangle y_{n+1}-\triangle y_n\ 。$$

同理，还有三阶差分

$$\triangle^3 y_n=\triangle^2 y_{n+1}-\triangle^2 y_n$$

和四阶差分

$$\triangle^4 y_n=\triangle^3 y_{n+1}-\triangle^3 y_n$$

等等。由这些各阶差分组成的表叫做函数的差分表，如表 3-2 所示。

表 3-2 差 分 表

自变量	函 数	一阶差分	二阶差分	三阶差分	四阶差分
x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_{n-3}	y_{n-3}	Δy_{n-3}	$\Delta^2 y_{n-3}$	$\Delta^3 y_{n-3}$	$\Delta^4 y_{n-3}$
x_{n-2}	y_{n-2}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-2}$	$\Delta^3 y_{n-2}$	$\Delta^4 y_{n-2}$
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-1}$	$\Delta^3 y_{n-1}$	$\Delta^4 y_{n-1}$
x_n	y_n	Δy_n	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$	$\Delta^4 y_n$
x_{n+1}	y_{n+1}	Δy_{n+1}	$\Delta^2 y_{n+1}$	$\Delta^3 y_{n+1}$	$\Delta^4 y_{n+1}$
x_{n+2}	y_{n+3}	Δy_{n+2}	$\Delta^2 y_{n+2}$	$\Delta^3 y_{n+3}$	$\Delta^4 y_{n+2}$
x_{n+3}	y_{n+3}	Δy_{n+3}	$\Delta^2 y_{n+3}$	$\Delta^3 y_{n+3}$	$\Delta^4 y_{n+3}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_{n+k}	y_{n+k}	Δy_{n+k}	$\Delta^2 y_{n+k}$	$\Delta^3 y_{n+k}$	$\Delta^4 y_{n+k}$

表中所有的数，叫做元素。与给定元素有关的在其右边邻近纵行中同一横行和上一横行的两个元素，叫做对于给定元素的顺序元素。例如 Δy_n 和 Δy_{n-1} 是 y_n 的顺序元素，$\Delta^2 y_n$ 和 $\Delta^2 y_{n-1}$ 是 Δy_n 的顺序元素，$\Delta^2 y_{n-1}$ 和 $\Delta^2 y_{n-2}$ 是 Δy_{n-1} 的顺序元素，其它依次类推。由 y_n 起（如表 3-2）用箭头线依次向右方取各顺序元素组成一个顺序元素三角形，如图 3-8 所示。

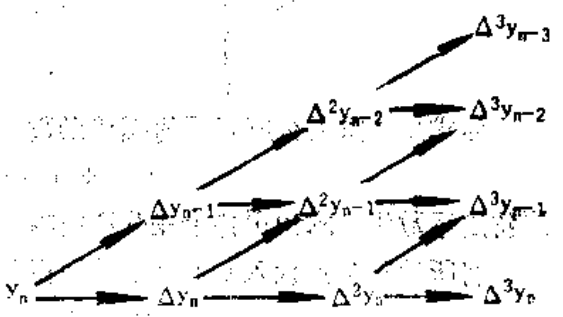
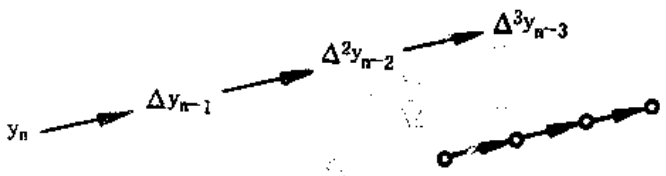


图 3-8 顺序元素三角形

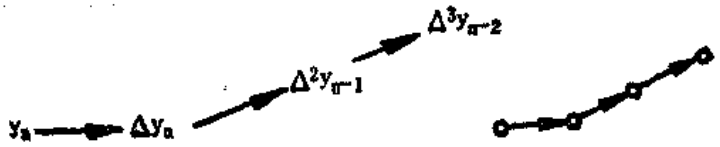
在顺序元素三角形内，由 y_n 起向右沿水平方向在各纵行内顺次各取一个元素组成的行，叫水平行。如：

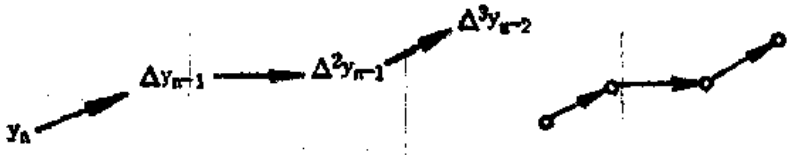


沿顺序元素三角形斜边向右，在各纵行内顺次各取一个元素组成的行叫斜行。如



在顺序元素三角形内除去水平行和斜行以外，自 y_n 起向右，在各纵行上顺取任一个元素所组成的行，均叫做折行。如





等等。

2. 差分形式的插值函数公式

设有 $n+1$ 个相邻而等间隔的点，从差分及差分表的概念所知：这就等于知道了 n 阶差分，也就是可以通过已知各点来求得 n 次的插值函数。

假设给出一个水平行（到二阶差分），等于给出表中点 (x_n, y_n) 以及向下的两个点 (x_{n+1}, y_{n+1})，(x_{n+2}, y_{n+2})

x_n	y_n	Δy_n	$\Delta^2 y_n$
x_{n+1}	y_{n+1}	Δy_{n+1}	
x_{n+2}	y_{n+2}		

为求用各阶差分所表示的插值函数，我们假设此函数为

$$y = A + B(x - x_n) + C(x - x_n)^2 \tag{3-22}$$

用待定系数法，求出用各个差分和间隔 h 所表示的系数 A、B、C。

将所给三个点代入（3-22）式可得相应于各点的函数值

$$y_n = A \tag{3-23}$$

$$y_{n+1} = A + Bh + Ch^2 \tag{3-24}$$

$$y_{n+2} = A + 2Bh + 4Ch^2 \tag{3-25}$$

求其一阶差分

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = Bh + Ch^2 \tag{3-26}$$

$$\Delta y_{n+1} = y_{n+2} - y_{n+1} = Bh + 3Ch^2 \tag{3-27}$$

求其二阶差分

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = 2Ch^2 \tag{3-28}$$

由式（3-23）、（3-26）、（3-28）解得系数 A、B 和 C 为

$$A = y_n$$

$$C = \frac{\Delta^2 y_n}{2h^2}$$

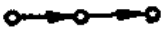
$$B = \frac{\Delta y_n - \frac{\Delta^2 y_n}{2}}{h}$$

将 A、B、C 代入插值函数公式（3-22）中，并令插值系数 ξ

$$\xi = \frac{x - x_n}{h} \tag{3-29}$$

最后得到二阶差分的水平行的插值函数公式如下：

$$y = y_n + \xi \triangle y_n + \frac{\xi(\xi-1)}{2} \cdot \triangle^2 y_n$$



(3-30)

如果是通过四点(x_n, y_n)、(x_{n+1}, y_{n+1})、(x_{n+2}, y_{n+2})、(x_{n+3}, y_{n+3})，即用三阶差分，令插值函数为

$$y = A + B(x - x_n) + C(x - x_n)^2 + D(x - x_n)^3 \tag{3-31}$$

同样用待定系数法确定系数A、B、C、D为

$$A = y_n$$

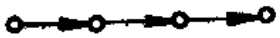
$$D = \frac{\triangle^3 y_n}{6h^3}$$

$$C = \frac{\triangle^2 y_n - \triangle^3 y_n}{2h^2}$$

$$B = \frac{\triangle y_n}{h} - \frac{\triangle^2 y_n}{2h} + \frac{\triangle^3 y_n}{3h}$$

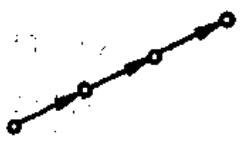
将A、B、C、D代入插值函数公式（3-31）中，并引入（3-29）式的插值系数ξ，经过化简合并，最后导出用三阶差分水平行的插值函数公式为

$$y = y_n + \xi \triangle y_n + \frac{\xi(\xi-1)}{2!} \triangle^2 y_n + \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{3!} \triangle^3 y_n \tag{3-32}$$



同理，可求得用到三阶差分的斜行和折行的插值函数公式

$$y = y_n + \xi \triangle y_{n-1} + \frac{(\xi+1)\xi}{2!} \triangle^2 y_{n-2} + \frac{(\xi+2)(\xi+1)\xi}{3!} \triangle^3 y_{n-3}$$



(3-33)

$$y = y_n + \xi \triangle y_n + \frac{\xi(\xi-1)}{2!} \triangle^2 y_{n-1} + \frac{(\xi+1)\xi(\xi-1)}{3!} \triangle^3 y_{n-2}$$



(3-34)

等等，并把所有各种行的插值函数综合写成如下形式

$$y=y_n+\xi\begin{cases}\Delta y_{n-1}+\dfrac{(\xi+1)\xi}{2!}\begin{cases}\Delta^2y_{n-2}+\dfrac{(\xi+2)(\xi+1)\xi}{3!}\begin{cases}\Delta^3y_{n-3}+\cdots\\ \Delta^3y_{n-2}+\cdots\end{cases}\\ \Delta^2y_{n-1}+\dfrac{(\xi+1)\xi(\xi-1)}{3!}\begin{cases}\Delta^3y_{n-2}+\cdots\\ \Delta^3y_{n-1}+\cdots\end{cases}\end{cases}\\ \Delta y_n+\dfrac{\xi(\xi-1)}{2!}\begin{cases}\Delta^2y_{n-1}+\dfrac{(\xi+1)\xi(\xi-1)}{3!}\begin{cases}\Delta^3y_{n-2}+\cdots\\ \Delta^3y_{n-1}+\cdots\end{cases}\\ \Delta^2y_n+\dfrac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{3!}\begin{cases}\Delta^3y_{n-1}+\cdots\\ \Delta^3y_n+\cdots\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

分析上表可看出：分析不同行的同阶差分前的系数可知，水平行的系数收敛得最快，斜行的系数收敛得最慢。因而应用不同行插值函数公式计算时以水平行的准确度最好，而斜行的准确度最差；另外，从组成各种行所需要的已知给定点与所求的插值点位置来看，按斜行元素组成的插值函数公式，所求点在已给定点所确定的曲线之外，称之为外推（如图 3-9 所示），而其它各种行的插值函数公式，所求点在已给点所确定的曲线之内，如图3-10（a）、（b）、（c）所示，称之为内插。

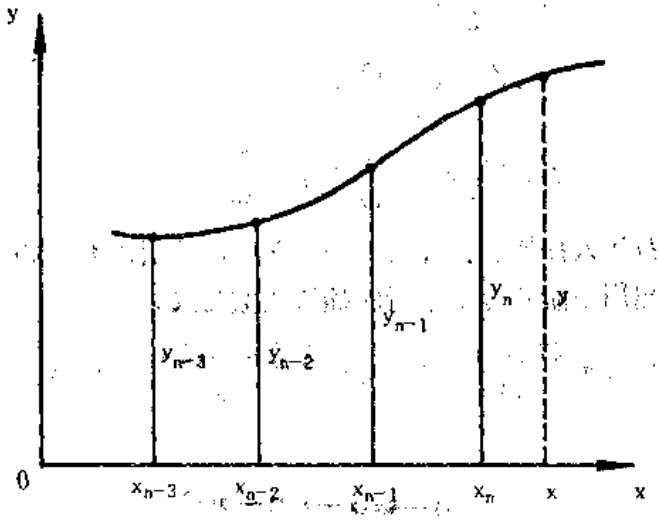
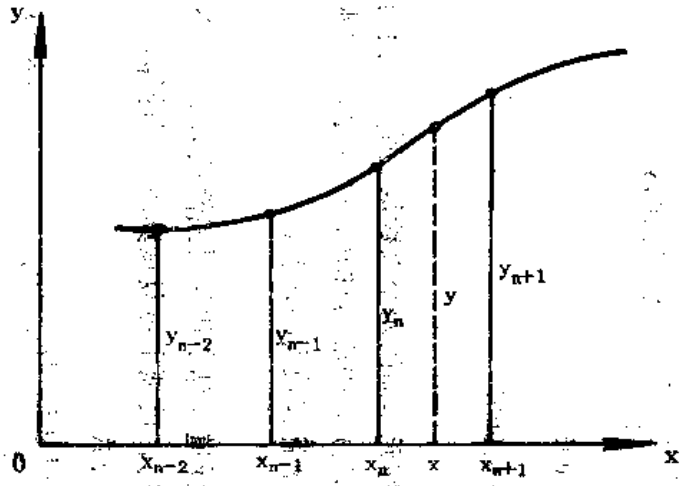


图 3-9　外推示意图

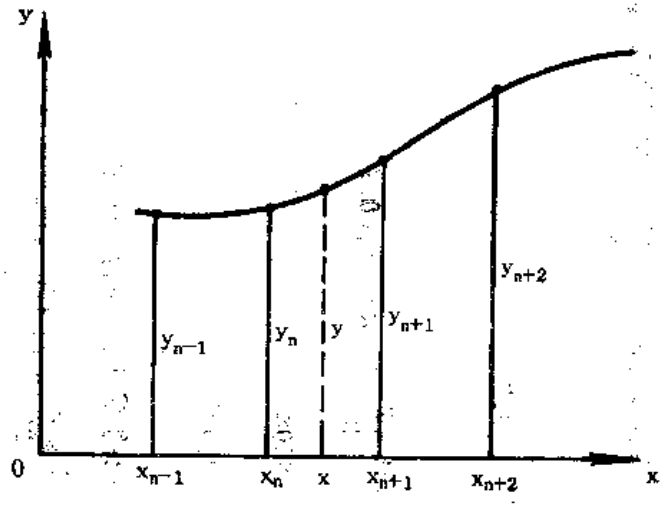
例 3-9　已知西亚切阻力定律 $G(V_\tau)$ 函数，如下表。

表 3-3

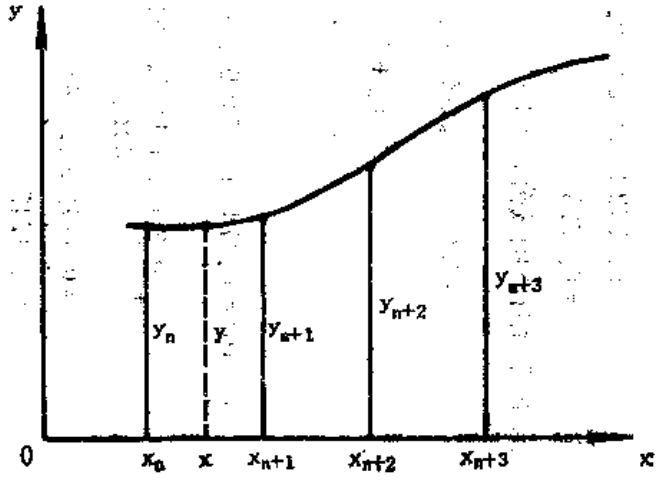
n	V_τ	$G(V_\tau)$	$\triangle G(V_\tau)$	$\triangle^2G(V_\tau)$	$\triangle^3G(V_\tau)$
$n-3$	350	0.0956	0.0332	−0.0081	0.0031
$n-2$	400	0.1288	0.0251	−0.0048	0.0014
$n-1$	450	0.1539	0.0203	−0.0034	0.0007
n	500	0.1742	0.0169	−0.0027	0.0008
$n+1$	550	0.1911	0.0142	−0.0019	
$n+2$	600	0.2053	0.0123		
$n+3$	650	0.2176			



(a)



(b)



(c)

图 3-10 内插示意图(*a*), (*b*), (*c*)

应用水平行及斜行的插值公式，来分别计算 $G(510)$ 的值。

解：首先根据函数 $G(V_\tau)$ 组成差分数，这上表所示。

其次，应用水平行插值公式（3-32）写出相应的 $G(V_\tau)$ 水平行公式为

$$G(V_\tau)=G(V_\tau)_n+\xi\triangle G(V_\tau)_n+\frac{\xi(\xi-1)}{2!}\triangle^2G(V_\tau)_n+\frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{3!}\triangle^3G(V_\tau)_n$$

计算

$$\xi=\frac{V_\tau-V_{\tau n}}{h}=\frac{510-500}{50}=0.2$$

代入上式得：

$$\begin{aligned}G(510)&=0.1742+0.2\times0.0169+\frac{0.2(0.2-1)}{2}\times(-0.0027)\\&\quad+\frac{0.2(0.2-1)(0.2-2)}{3\times2}\times0.0008\\&=0.1742+0.0034+0.0002+0.0000\\&=0.1778\end{aligned}$$

再者，应用斜行插值函数公式（3-33）写出相应的 $G(V_\tau)$ 斜行公式为

$$G(V_\tau)=G(V_\tau)_n+\xi\triangle G(V_\tau)_{n-1}+\frac{\xi(\xi+1)}{2!}\triangle^2G(V_\tau)_{n-2}+$$

$$+\frac{\xi(\xi+1)(\xi+2)}{3!}\triangle^3G(V_\tau)_{n-3}$$

则有

$$\begin{aligned}G(510)&=0.1742+0.2\times0.0203+\frac{0.2(0.2+1)}{2}\times(-0.0048)\\&\quad+\frac{0.2(0.2+1)(0.2+2)}{3\times2}\times0.0031\\&=0.1742+0.0041-0.0006+0.0003\\&=0.1745\end{aligned}$$

从例题中可以看出，应同水平行较准确，其顺序元素前的四个系数很快减小，而斜行插值公式的系数减小很慢，所以准确度较差。由 $G(V_\tau)$ 表查得 $G(510)=0.1778$，与水平行插值公式所得的结果一致，与斜行插值公式所得结果就有较大的误差。

3. 函数的反插值

应用线性插值时，进行反插值并不复杂。但在弹道计算中往往用线性插值认为不太准确，而去用二次或二次以上的曲线插值进行反插值时，就须用重复试算法进行计算。

现在我们来研究按水平行顺序元素组成的插值公式

$$y=y_n+\xi\triangle y_n+\frac{\xi(\xi-1)}{2!}\triangle^2y_n+\frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{3!}\triangle^3y_n \qquad (3\text{-}35)$$

进行反插值问题的解法。

为了便于计算，将（3-35）改写成如下形式

$$\xi=\frac{y-y_n}{\triangle y_n}+\xi(1-\xi)\frac{\triangle^2y_n}{2\triangle y_n}-\xi(1-\xi)(2-\xi)\frac{\triangle^3y_n}{6\triangle y_n} \qquad (3\text{-}36)$$

第一次近似，取

$$\xi_1=\frac{y-y_n}{\triangle y_n}$$

以 ξ_1 代替（3-36）式中等号右端各项的 ξ，得出第二次近似式为

$$\xi_2=\xi_1+\xi_1(1-\xi_1)\frac{\triangle^2 y_n}{2\triangle y_n}-\xi_1(1-\xi_1)(2-\xi_1)\frac{\triangle^3 y_n}{6\triangle y_n} \tag{3-37}$$

然后，再以 ξ_2 去代替（3-36）式等号右端各项中的 ξ，得出第三次近似式为

$$\xi_3=\xi_1+\xi_2(1-\xi_2)\frac{\triangle^2 y_n}{2\triangle y_n}-\xi_2(1-\xi_2)(2-\xi_2)\frac{\triangle^3 y_n}{6\triangle y_n} \tag{3-38}$$

这样重复试算下去，直到连续两次所得的 ξ 值，在要求的有效数字范围内时为止。

求得 ξ 值后，再按下式求出自变量值。

$$x=x_n+\xi h \tag{3-39}$$

应用斜行或折行的插值公式求反插值的方法与上述的水平行的方法相同。

例 3-10 已知 $G(V_\tau)=0.1778$，按水平行插值公式求出其相应的 V_τ（见例 3-9 的表3-3）。

解：用重复试算法求 ξ，第一次近似取为

$$\xi_1=\frac{G(V_\tau)-G(V_\tau)_n}{\triangle G(V_\tau)_n}=\frac{0.1778-0.1742}{0.0169}$$

$$=0.2130$$

第二次近似，可用（3-37）式得

$$\xi_2=\xi_1+\xi_1(1-\xi_1)\frac{\triangle^2 G(V_\tau)_n}{2\triangle G(V_\tau)_n}-\xi_1(1-\xi_1)(2-\xi_1)\frac{\triangle^3 G(V_\tau)_n}{6\triangle G(V_\tau)_n}$$

$$=0.2130+0.2130(0.7870)\frac{-0.0027}{2\times 0.0169}-0.2130\times 0.7870$$

$$\times 1.7870\times\frac{0.0007}{6\times 0.0169}$$

$$=0.2130-0.0134-0.0000=0.1996$$

第三次近似，用（3-38）式计算

$$\xi_3=\xi_1+\xi_2(1-\xi_2)\frac{\triangle^2 G(V_\tau)_n}{2\triangle G(V_\tau)_n}-\xi_2(1-\xi_2)(2-\xi_2)\frac{\triangle^3 G(V_\tau)_n}{6\triangle G(V_\tau)_n}$$

$$=0.2130+0.1996\times 0.8004\cdot\frac{-0.0027}{2\times 0.0169}-0.1996\times 0.8004$$

$$\times 1.8004\cdot\frac{0.0007}{6\times 0.0169}$$

$$=0.2130-0.0123-0.0000=0.2002$$

取三位有效数字，$\xi_2=\xi_3=0.200$，没有必要再往下计算。如果取四位有效数字，则仍继续近似计算下去，直到连续两次所得的值取四位有效数字相等时为止。

所求 V_τ 应为

$$V_\tau=V_{\tau n}+\xi_2 h$$

$$=500+0.200\times 50=510\text{米/秒}$$

4. 函数的数值微分

数值微分的任务，是根据表中给定的函数值计算出对给定自变量的各阶导函数的值。为了解决这个问题，多半都是用插值函数来代替某一真实函数，并将此插值函数微分。

首先我们取按水平行差分的插值公式（3-32）

$$y = y_n + \xi\Delta y_n + \frac{\xi(\xi-1)}{2}\Delta^2 y_n + \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{6}\Delta^3 y_n$$

$$= y_n + \xi\Delta y_n + \frac{1}{2}(\xi^2-\xi)\Delta^2 y_n + \frac{1}{6}(\xi^3-3\xi^2+2\xi)\Delta^3 y_n$$

将该式两边对 x 求导，得

$$y'_x = \frac{d\xi}{dx}\left[\Delta y_n + \frac{1}{2}(2\xi-1)\Delta^2 y_n + \frac{1}{6}(3\xi^2-6\xi+2)\Delta^3 y_n\right] \tag{3-40}$$

因为 $x = x_n + \xi h$，故得

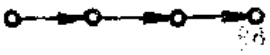
$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{h} \tag{3-41}$$

将（3-41）式代入（3-40）式，得

$$y'_x = \frac{1}{h}\left(\Delta y_n + \frac{2\xi-1}{2}\Delta^2 y_n + \frac{3\xi^2-6\xi+2}{6}\Delta^3 y_n\right) \tag{3-42}$$

应用（3-42）式，可以算出任意自变量 x 的导函数值。但是，用这样的公式计算导函数值比较复杂。不如令 $\xi=0$，则 $y'_x = y'_n$，代入（3-42）式得到自变量为 x_n 时的导函数值的简单公式

$$y'_n = \frac{1}{h}\left(\Delta y_n - \frac{1}{2}\Delta^2 y_n + \frac{1}{3}\Delta^3 y_n\right) \tag{3-43}$$



后，再应用它，编制出相应于各给定函数值的导函数值的表。至于对各自变量值之间的值的导函数值，可以再用插值法求得。

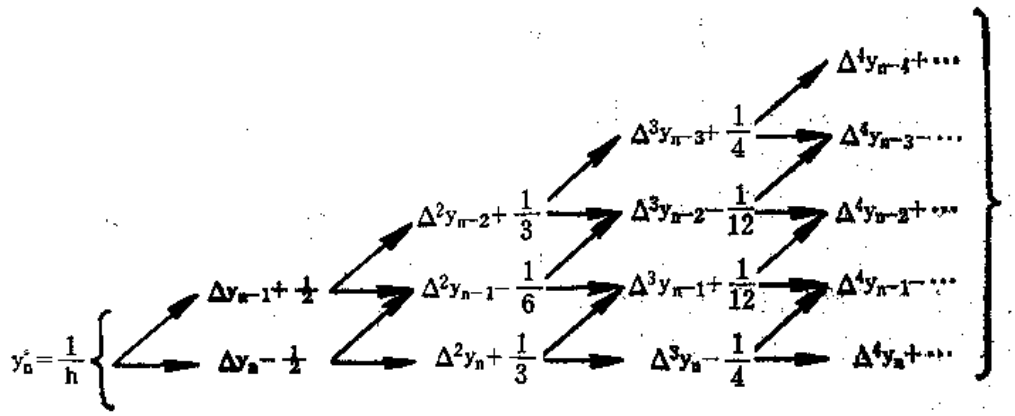
同样可以对任一种折行的插值函数，譬如对（3-34）式可用上述类似的方法，求得其导函数的公式

$$y'_n = \frac{1}{h}\left(\Delta y_n - \frac{1}{2}\Delta^2 y_{n-1} - \frac{1}{6}\Delta^3 y_{n-2}\right),$$



(3-44)

将求得的各种行到四阶差分的导函数公式列成如下格式。



假如应用折行的导函数公式（3-44），并略去其最后一项，得

$$y'_n=\frac{1}{h}\left(\triangle y_n-\frac{1}{2}\triangle^2 y_{n-1}\right) \tag{3-45}$$

将 $\triangle^2 y_{n-1}=\triangle y_n-\triangle y_{n-1}$ 代入（3-45）式，得

$$y'_n=\frac{1}{h}\left(\triangle y_n-\frac{1}{2}\triangle y_n+\frac{1}{2}\triangle y_{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2h}\left(\triangle y_n+\triangle y_{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2h}\left\{\left(y_{n+1}-y_n\right)+\left(y_n-y_{n-1}\right)\right\}$$

或最后得

$$y'_n=\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h} \tag{3-46}$$

此式（3-46）的几何意义，可以由图3-11看出，由于

$$y'_n=\mathrm{tg}\varphi^*$$

$$\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h}=\mathrm{tg}\,\varphi$$

则（3-46）式就为：$\mathrm{tg}\varphi^*=\mathrm{tg}\,\varphi$，$\varphi^*=\varphi$。也就是说，当忽略三阶和三阶以上的各阶差分时，曲线中间点$(x_n,\ y_n)$的切线 MN 与连接 $(x_{n-1},\ y_{n-1})$ 和 $(x_{n+1},\ y_{n+1})$ 两点的弦 AB 平行。

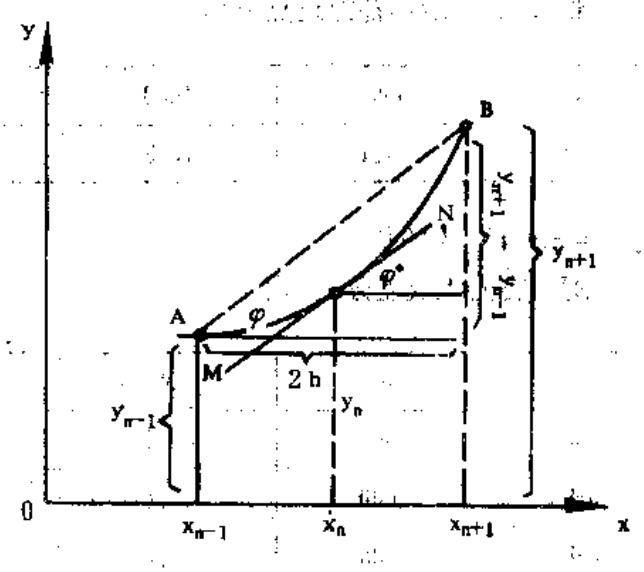


图 3-11 (3-46)式的几何意义图

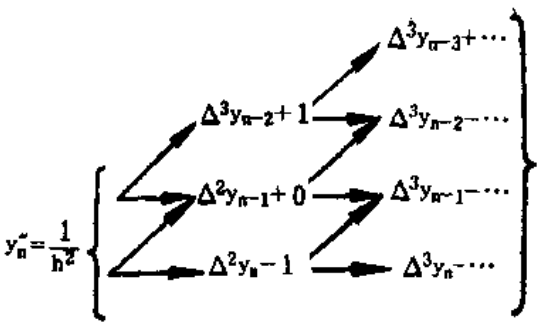
至于水平行的二阶导函数公式可以把（3-42）式再对 x 求导，并以 $\frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{h}$ 代入，求得

$$y''_n=\frac{1}{h^2}\left[\triangle^2 y_n+(\xi-1)\triangle^3 y_n\right] \tag{3-47}$$

如果令 $\xi=0$，即 $x=x_n$，$y''_n=y''_n$ 时，水平行二阶导函数公式则为

$$y''_n = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_n - \Delta^3 y_n\right) \qquad (3\text{-}48)$$

同样也可以求得其它各种行的二阶导函数公式，亦列成如右图所示的形式。



应该指出：数值微分是数值运算中最不准确的运算，其原因可由图 3-12 清楚地看出：实际函数 1 与插值函数 2 在某一相同的自变量值时的切线方向可能完全不同，特别是在各给定点处更为显著。

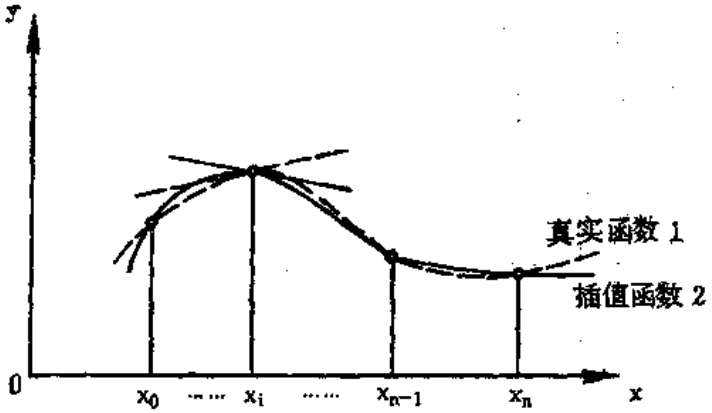


图 3-12　数值微分的误差图

例 3-11　给出各弹道点坐标。

x	500	1000	1500	2000	2500
y	41.7	75.8	101.5	117.8	123.5

求 $x=500$ 时 y'_n 的值。

解：首先组成差分表如下。

	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
n	500	41.7	34.1	−8.4	−1.0
$n+1$	1000	75.8	25.7	−9.4	
$n+2$	1500	101.5	16.3		
$n+3$	2000	117.8			

其次写出水平行的导函数公式（3-43）

$$y'_n = \frac{1}{h}\left(\Delta y_n - \frac{1}{2}\Delta^2 y_n + \frac{1}{3}\Delta^3 y_n\right)$$

以 $h=500$，$\Delta y_n = 34.1$，$\Delta^2 y_n = -8.4$，$\Delta^3 y_n = -1.0$ 代入上式，得

$$y_n' = -\frac{1}{500}\left(34.1 + \frac{1}{2} \times 8.4 - \frac{1}{3} \times 1.0\right)$$

$$= \frac{1}{500} \times 37.967 = 0.0759$$

此结果比真正的 y_n' 值（0.0761）小 0.0002。

5. 差分形式的数值积分公式

现在来介绍被积分函数用差分形式表示的插值函数，在间隔 $h = x_{n+1} - x_n$ 内进行积分的方法（如图 3-13）。

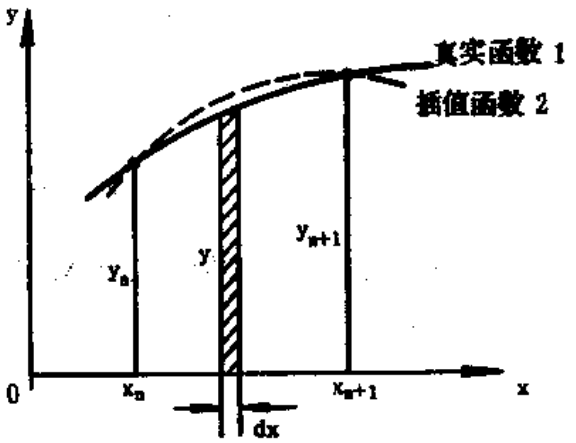


图 3-13 差分型的数值积分

我们引进符号

$$I = I_n + \int_{x_n}^{x} y dx \qquad (3\text{-}49)$$

式中，I_n——当 x 到 x_n 时的 I 值，则

$$I_{n+1} = I_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y dx$$

或者

$$\triangle I_n = I_{n+1} - I_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y dx$$

式中，$\triangle I_n$——I 在 x_n 与 x_{n+1} 之间的增量。

现在以水平行的差分插值函数（如图 3-13 中的曲线 2）的公式（3-32）来代替真实函数（如图 3-13 中的曲线 1），以 $hd\xi$ 代替 dx，在区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上进行积分（由于 $x = x_n + \xi h$，则 x 从 x_n 到 x_{n+1} 时，就有 ξ 从 0 到 1）。

$$\triangle I_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y dx = \int_0^1 y h d\xi = h\int_0^1 y d\xi$$

$$= h\left[\int_0^1 \left(y_n + \xi\triangle y_n + \frac{\xi(\xi-1)}{2}\triangle^2 y_n + \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{6}\triangle^3 y_n\right)d\xi\right]$$

$$= h\left[y_n\int_0^1 d\xi + \triangle y_n\int_0^1 \xi d\xi + \frac{\triangle^2 y_n}{2}\int_0^1 \left(\xi^2 - \xi\right)d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{\triangle^3 y_n}{6}\int_0^1 \left(\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi\right)d\xi\right]$$

$$\approx h\left(y_n + \frac{1}{2}\triangle y_n - \frac{1}{12}\triangle^2 y_n + \frac{1}{24}\triangle^3 y_n\right)$$

(3-51)

同样，用斜行或者折行的插值函数的公式（3-33）和（3-34）分别来代替真实函数进行积分，则得

$$\triangle I_n = h\left(y_n + \frac{1}{2}\triangle y_{n-1} + \frac{5}{12}\triangle^2 y_{n-2} + \frac{3}{8}\triangle^3 y_{n-3}\right)$$



(3-52)

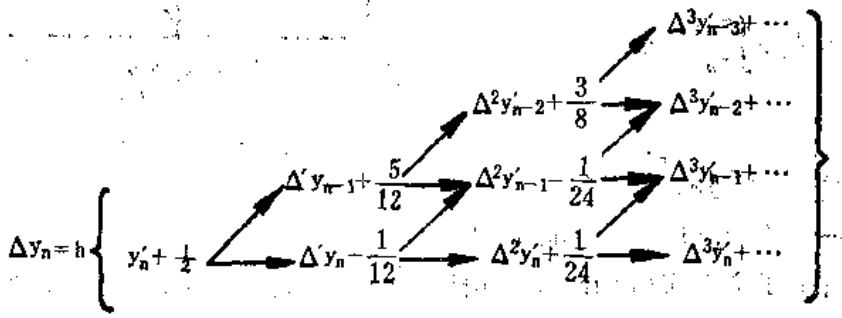
和

$$\triangle I_n = h\left(y_n + \frac{1}{2}\triangle y_n - \frac{1}{12}\triangle^2 y_{n-1} - \frac{1}{24}\triangle^3 y_{n-2}\right)$$



(3-53)

对于用所有各种行的插值函数去代替真实函数的积分公式可综合写成如下形式。



数值积分公式比插值函数公式及数值微分公式的准确性高些。这是由于其误差是正负交错而互相补偿的缘故，这一点可从图 3-14 看出。

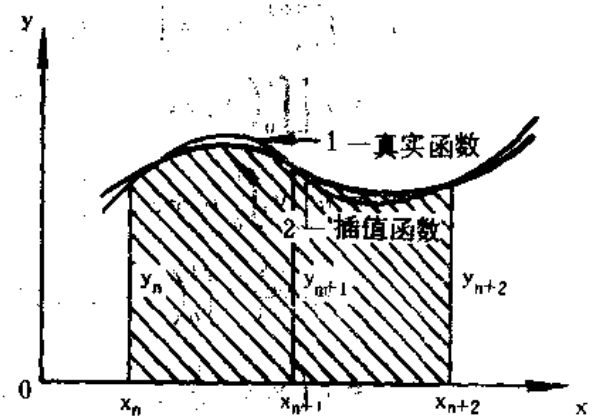


图 3-14 数值积分示意图

各数值积分公式的准确性以斜行元素所组成的积分公式（3-52）最差，因为它的系数减小得最慢。而其它各行的积分公式的准确性均相类似。

在弹道诸元的计算中，经常碰到如下形式的被积函数。

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

将被积函数y'代入水平行、斜行、折行的差分形式的数值积分公式（3-51）、（3-52）、和（3-53），分别得到如下各式：

$$\triangle y_n = h\left(y'_n + \frac{1}{2}\triangle y'_n - \frac{1}{12}\triangle^2 y'_n + \frac{1}{24}\triangle^3 y'_n\right)$$



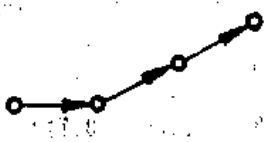
(3-54)

$$\triangle y_n = h\left(y'_n + \frac{1}{2}\triangle y'_{n-1} + \frac{5}{12}\triangle^2 y'_{n-1} + \frac{3}{8}\triangle^3 y_{n-3} \right)$$



(3-55)

$$\triangle y_n = h\left(y'_n + \frac{1}{2}\triangle y'_n - \frac{1}{12}\triangle^2 y_{n-1} - \frac{1}{24}\triangle^3 y_{n-2} \right)$$



(3-56)

例 3-12　已知弹道诸元如下。

x	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000
u	602.6	570.3	539.6	510.5	483.2	457.3	433.5	411.5	391.1

其中 x 为水平射程(米)，u 为水平速度分量（米/秒）。求弹丸飞达弹道各给定点的飞行时间。

解：因为 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{u} = t'_x$，故可由上述给定值 u 求得相应的 t'_x 值，然后应用基本表格组成差分表，再应用水平行的数值积分公式（3-54），取到二阶差分，则有

$$\triangle t_n = h\left(t'_n + \frac{1}{2}\triangle t'_n - \frac{1}{12}\triangle^2 t'_n \right)$$

在辅助表格中求出各个 $\triangle t_n$ 值，并用公式 $t_{n+1} = t_n + \triangle t$，在基本表格中求出各个 x 值所相应的 t 值。其计算结果如下列基本表格中所示。

基　本　表　格

n	x	u	$t'_n = 1/u$	$\triangle t'_n$	$\triangle^2 t'_n$	$\triangle t_n$	t_n
0	0	602.6	0.001659	0.000094	0.000006	0.852	0
1	500	570.3	0.001753	0.000100	0.000006	0.901	0.852
2	1000	539.6	0.001853	0.000106	0.000005	0.953	1.753
3	1500	510.5	0.001959	0.000111	0.000006	1.007	2.706
4	2000	483.2	0.002070	0.000117	0.000003	1.064	3.713
5	2500	457.3	0.002187	0.000120	0.000003	1.123	4.777
6	3000	433.5	0.002307	0.000123	0.000004	1.184	5.900
7	3500	411.5	0.002430	0.000127		1.247	7.084
8	4000	391.1	0.002557				8.331

辅 助 表 格

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
t_n'	0.001659	0.001753	0.001853	0.001959	0.002070	0.002187	0.002307	0.002430	0.002557
$\frac{1}{2}\Delta t_n'$	0.000047	0.000050	0.000053	0.000055	0.000058	0.000060	0.000062	0.000064	
$-\frac{1}{12}\Delta^2 t_n'$	−0.000001	−0.000001	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000000	0.000000	
Σ	0.001705	0.001802	0.001906	0.002014	0.002128	0.002247	0.002369	0.002494	
$\Delta t_n = h\Sigma$	0.852	0.901	0.953	1.007	1.064	1.123	1.184	1.247	
t_n	0	0.852	1.753	2.706	3.713	4.777	5.900	7.084	8.331

该例的计算，也可以通过 FORTAN 语言在电子数字计算机上编写程序来完成，其程序如下：

```
      DIMENSION N(9), X(10), U(10), TP(10), TDP1(9), TDP2(8),
     &          TD(9), T(9)
      DATA X/0., 500., 1000., 1500., 2000., 2500., 3000.,
     &       3500., 4000., 4500./
      DATA U/602.6, 570.3, 539.6, 510.5, 483.2, 457.3,
     &       433.5, 411.5, 391.1, 371.6/
      WRITE (108, 2)
      WRITE (108, 1)
    1 FORMAT(7X, '*□□N□□*□□□□X□□□□*□□□□U□□□□*□□□
     &□T□□□□*□□□□TD□□□*')
      WRITE (108, 2)
    2 FORMAT (7X, 47('-'))
      T(1)=0.0
      N(1)=0
      H=500.
      DO 20 I=1, 8
      TP(I)=1.0/U(I)
      TP(I+1)=1.0/U(I+1)
      TP(I+2)=1.0/U(I+2)
      TDP1(I)=TP(I+1)-TP(I)
      TDP1(I+1)=TP(I+2)-TP(I+1)
      TDP2(I)=TDP1(I+1)-TDP1(I)
      TD(I)=H*(TP(I)+TDP1(I)/2.0-TDP2(I)/12.0)
      T(I+1)=T(I)+TD(I)
```

```
 20   N(I+1)=I
      WRITE(108, 4)(N(I), X(I), U(I), T(I), TD(I), I=1, 9)
  4   FORMAT(7X, ('*'), I3, 2X, ('*'), F7.0, 2X, ('*'),
  &   F7.1, 2X, ('*'), F7.3, 2X, ('*'), F7.3, 2X, ('*'))
      WRITE(108, 2)
      STOP
      END
```

程序中参量对照说明：

X——10 个元素的一维数组，输入参数，存放水平射程各给定值。

U——10 个元素的一维数组，输入参数，存放水平速度分量 u 的各给定值。

TP——10 个元素的一维数组，中间参数，存放对应各个 u 值的倒数，即 $t'=1/u$ 的值（作为被积函数）。

TDP1——9 个元素的一维数组，中间参数，存放各给定点的 t' 的一阶差分 $\triangle t'$ 的值。

TDP2——8 个元素的一维数组，中间参数，存放 t' 的二阶差分 $\triangle^2 t'$ 的值。

TD——8 个元素的一维数组，中间参数，存放应用水平行的数值积分公式所计算出的 $\triangle t$ 值。

T——9 个元素的一维数组，输出参数，存放弹丸飞达弹道各给定点的飞行时间 t 的值。

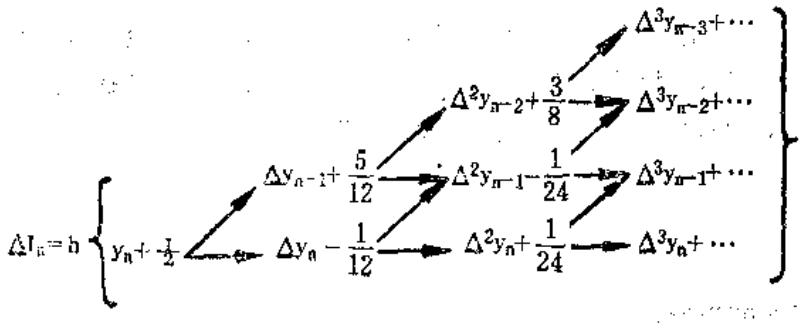
N——9 个元素的一维数组，存放序号 n。

打印结果如下表所示。

*	N	*	X	*	U	*	T	*	TD	*
*	0	*	0.	*	602.6	*	0.000	*	.853	*
*	1	*	500.	*	570.3	*	.853	*	.901	*
*	2	*	1000.	*	539.6	*	1.754	*	.953	*
*	3	*	1500.	*	510.5	*	2.707	*	1.007	*
*	4	*	2000.	*	483.2	*	3.714	*	1.064	*
*	5	*	2500.	*	457.3	*	4.778	*	1.123	*
*	6	*	3000.	*	433.5	*	5.901	*	1.184	*
*	7	*	3500.	*	411.5	*	7.085	*	1.246	*
*	8	*	4000.	*	391.1	*	8.332	*	0.000	*

6. 用差分法解微分方程

我们在差分形式的数值积分这一部分中，当把 y' 作为被积函数代入水平行、斜行、折行的积分公式时，曾得到过公式(3-54)～(3-56)。综合所有各种行的关系式可写成如下形式。



现在我们来研究一下，如何能在解微分方程时利用这些关系式。

假若已给出微分方程

$$y'_x = f(x,\ y) \tag{3-57}$$

及其积分的初始条件为 $x = x_0$ 时 $y = y_0$。

首先要取自变量 x 的间隔 h。间隔 h 的大小是根据计算所要求的精度来选定的。h 的值愈小，计算就愈准确，但在该区间内进行积分的次数也就愈多。选择 h 时，通常使计算中被删去的第一个差分及其系数与 h 乘积的大小，对函数增量大小的影响可以忽略不计。也就是使得被删去的各差分中的第一个差分与 h 及其系数乘积的大小，不会影响到计算的精度。

计算通常在表格内进行，表的形式如表 3-4 和表 3-5 所示。

将已给出的 x_0 与 y_0 值代入微分方程 (3-57) 后，可以确定 y'_0

$$y'_0 = f(x_0,\ y_0)$$

将已知的 x_0、y_0 和 y'_0 的值作为初始值填入表 3-4 内，并用黑体字符来表示。

表 3-4 基 本 表 格

	n	x	y	Δy	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	$\Delta^3 y'$
一级近似	0	$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{y_0}$	①Δy_0	$\boldsymbol{y'_0}$	⑤$\Delta y'_0$		
	1	⑤x_1	②y_1		④y'_1			
二级近似	0	$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{y_0}$	①Δy_0	$\boldsymbol{y'_0}$	⑨$\Delta y'_0$	⑪$\Delta^2 y'_0$	
	1	⑤x_1	③y_1	②Δy_1	⑦y'_0	⑩$\Delta y'_1$		
	2	⑥x_2	④y_2		⑧y'_2			
三级近似	0	$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{y_0}$	①Δy_0	$\boldsymbol{y'_0}$	⑬$\Delta y'_0$	⑯$\Delta^2 y'_0$	⑱$\Delta^3 y'_0$
	1	⑦x_1	④y_1	②Δy_1	⑩y'_0	⑭$\Delta y'_1$	⑰$\Delta^2 y'_1$	$\Delta^3 y'_1$
	2	⑧x_2	⑤y_2	③Δy_2	⑪y'_2	⑮$\Delta y'_2$	$\Delta^2 y'_2$	
	3	⑨x_3	⑥y_3	Δy_3	⑫y'_3	$\Delta y'_3$		
	4	x_4	y_4		y'_4			
	5							

表 3-5 辅 助 表 格

	一级近似	二级近似		三级近似					
n	0	0	1	0	1	2	3	4	5
y'									
$\frac{1}{2}\triangle y'_{n-1}$									
$\frac{5}{12}\triangle^2 y'_{n-2}$									
$-\frac{3}{8}\triangle^3 y'_{n-3}$									
Σ									
I $\triangle y_n = h\Sigma$									
y_{n+1}									
x_{n+1}									
$y'_{n+1} = f(x_{n+1},\ y_{n+1})$									
y'_n									
$+\frac{1}{2}\triangle y'_n$									
$-\frac{1}{12}\triangle^2 y'_{n-1}$									
$-\frac{1}{24}\triangle^3 y'_{n-2}$									
Σ									
I $\triangle y_n = h\Sigma$									

利用这三个初始值 x_0、y_0、y'_0，进行如下**一级近似**的运算

$$\triangle y_0 \approx h y'_0 \qquad ①$$

求得 $\triangle y_0$ 后，确定

$$y_1 = y_0 + \triangle y_0 \qquad ②$$

$$x_1 = x_0 + h \qquad ③$$

将 x_1、y_1 代入微分方程 (3-57)，得

$$y'_1 = f(x_1,\ y_1) \qquad ④$$

求导函数的一阶差分

$$\triangle y'_0 = y'_1 - y'_0 \qquad ⑤$$

将以上求得的五个值（$\triangle y_0$、x_1、y_1、$\triangle y'_0$ 及 y'_1）填入表 3-4 内。各数字之前的①、②……表示计算的顺序。

在一级近似计算的基础上，下面进行**二级近似**的运算

$$\Delta y_0 = h\left(y_0' + \frac{1}{2}\Delta y_0'\right) \quad ①$$



$$\Delta y_1 = h\left(y_1' + \frac{1}{2}\Delta y_0'\right) \quad ②$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 \quad ③$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad ④$$

$$x_1 = x_0 + h \quad ⑤$$

$$x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h \quad ⑥$$

$$y_1' = f(x_1,\ y_1) \quad ⑦$$

$$y_2' = f(x_2,\ y_2) \quad ⑧$$

$$\Delta y_0' = y_1' - y_0' \quad ⑨$$

$$\Delta y_1' = y_2' - y_1' \quad ⑩$$

$$\Delta^2 y_0' = \Delta y_1' - \Delta y_0' \quad ⑪$$

将以上所求得的十一个值填入表 3-4 内，同样在各数字之前用①、②……表示计算的顺序。

再来进行**三级近似**的运算，其顺序如下：

$$\Delta y_0 = h\left(y_0' + \frac{1}{2}\Delta y_0' - \frac{1}{12}\Delta^2 y_0'\right) \quad ①$$



$$\Delta y_1 = h\left(y_1' + \frac{1}{2}\Delta y_1' - \frac{1}{12}\Delta^2 y_0'\right) \quad ②$$



$$\Delta y_2 = h\left(y_2' + \frac{1}{2}\Delta y_1' + \frac{5}{12}\Delta^2 y_0'\right) \quad ③$$



$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 \quad ④$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad ⑤$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 \quad ⑥$$

$$x_1 = x_0 + h \quad ⑦$$

$$x_2 = x_0 + 2h \quad ⑧$$

$$x_3 = x_0 + 3h \quad ⑨$$

$$y_1' = f(x_1,\ y_1) \quad ⑩$$

$$y_2' = f(x_2,\ y_2) \quad ⑪$$

$$y_3' = f(x_3,\ y_3) \quad ⑫$$

$$\Delta y_0' = y_1' - y_0' \quad ⑬$$

$$\Delta y_1' = y_2' - y_1' \quad ⑭$$

$$\Delta y_2' = y_3' - y_2' \quad ⑮$$

$$\Delta^2 y_0' = \Delta y_1' - \Delta y_0' \quad ⑯$$

$$\Delta^2 y_1' = \Delta y_2' - \Delta y_1' \quad ⑰$$

$$\Delta^3 y_0' = \Delta^2 y_1' - \Delta^2 y_0' \quad ⑱$$

将以上所求得的十八个值填入表 3-4 内，并标以计算顺序。

利用三级近似计算出的各阶差分，用取到四项的公式进行**校核计算**，即重新计算出函数的增量 Δy_0、Δy_1、Δy_2：

$$\Delta y_0 = h\left(y_0' + \frac{1}{2}\Delta y_0' - \frac{1}{12}\Delta^2 y_0' + \frac{1}{24}\Delta^3 y_0'\right)$$



$$\Delta y_1 = h\left(y_1' + \frac{1}{2}\Delta y_1' - \frac{1}{12}\Delta^2 y_1' + \frac{1}{24}\Delta^3 y_0'\right)$$



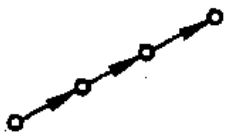
$$\Delta y_2 = h\left(y_2' + \frac{1}{2}\Delta y_2' - \frac{1}{12}\Delta^2 y_1' - \frac{1}{24}\Delta^3 y_0'\right)$$



假若计算出的各函数值的增量与前面三级近似所求得的值不一致的话，则应以后者为准，并对表 3-4 中的 Δy 和 y 值进行修正。

近似计算过程到此结束，接着转入**正常计算**。用斜行公式

$$\Delta y_3 = h\left(y_3' + \frac{1}{2}\Delta y_2' + \frac{5}{12}\Delta^2 y_1' + \frac{3}{8}\Delta^3 y_0'\right)$$



来计算 Δy_3，此后再计算

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3 \text{ 和 } x_4 = x_0 + 4h$$

由求得的 x_4、y_4 代入微分方程 (3-57) 可得

$$y_4' = f(x_4,\ y_4)$$

将 x_4、y_4、y_4' 填入表 3-4 中，并计算其各阶差分 $\Delta y_3'$、$\Delta^2 y_2'$ 及 $\Delta^3 y_1'$。

以后按较为准确的折行公式重新计算 Δy_3

$$\Delta y_3 = h\left(y_3' + \frac{1}{2}\Delta y_3' - \frac{1}{12}\Delta^2 y_2' - \frac{1}{24}\Delta^3 y_1'\right)$$



假若计算结果与前面计算出的 Δy_3 不同的话，则应以后者为标准，并对 Δy_3 和 y_4 进行修正。

随后再按斜行公式计算 Δy_4……，一直用“斜行外推、折行校核”的正常计算方法，到全部的积分区间积分完为止。

所有的计算，均在辅助表格（表 3-5）中进行。

例 3-13　已知微分方程

$$y_x' = 2x + y$$

及其积分的初始条件为 $x_0 = 0$ 时 $y_0 = 0.1$。取自变量 x 的间隔 $h = 0.1$，计算结果准确到小数点后面三位。

解：1. 起始计算

$$y_0' = 2x_0 + y_0 = 0.100$$

并与起始值 x_0，y_0 一并填入基本表格的一级近似的“0”行内（如表 3-6 所示）。

2. 一级近似

①在辅助表格（表 3-7）的一级近似“0”栏内计算

$$\Delta y_0 = h y_0' = 0.1 \times 0.1 = 0.010$$

填入基本表格“0”行内。

②在基本表格“1”行内计算

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0.1 + 0.010 = 0.110$$

③计算

$$x_1 = x_0 + h = 0.100$$

表 3-6 基 本 表 格

	n	x	y	Δy	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	$\Delta^3 y'$
一级近似	0	0	0.100	①0.010	0.100	⑤0.210		
	1	③0.100	②0.110		④0.310			
二级近似	0	0	0.100	①0.020	0.100	⑨0.220	⑪0.022	
	1	⑤0.1	③0.120	②0.042	⑦0.320	⑩0.242		
	2	⑥0.2	④0.162		⑧0.562			
三级近似	0	0	0.100	①0.021	0.100	⑬0.221	⑮0.023	⑰0.002
	1	⑦0.1	④0.121	②0.044	⑩0.321	⑭0.244	⑯0.025	0.005
	2	⑧0.2	⑥0.165	③0.069 (70)	⑪0.565	⑮0.269	0.030	0.001
	3	⑨0.3	⑧0.234 (5)	0.098	⑫0.834	0.299	0.031	
	4	0.4	0.333	0.129 (30)	1.133	0.329		
	5	0.5	0.463 (2)		1.462			

④在辅助表格的一级近似“0”栏内计算（表 3-7）

$$y_1' = 2x_1 + y_1 = 0.2 + 0.110 = 0.310$$

并填入基本表格的一级近似“1”行内。

表 3-7 辅 助 表 格

	一级近似	二级近似		三级近似			正常计算		
n	0	0	1	0	1	2	3	4	5
y_n'	0.100	0.100	0.310	0.100	0.320	0.562	0.834	1.133	1.461
$\frac{1}{2}\Delta y_{n-1}'$		0.105	0.105	0.110	0.121	0.121	0.134	0.149	0.165
$\frac{5}{12}\Delta^2 y_{n-2}'$				0.002 (水平行)	0.002 (折行)	0.009 (斜行)	0.010	0.012	0.013
$\frac{3}{8}\Delta^3 y_{n-3}'$							0.001	0.002	0.0004
Σ	0.100	0.205	0.415	0.020	0.440	0.692	0.979	1.296	1.639
I $\Delta y_n = h\Sigma$	0.010	0.020	0.042	0.021	0.044	0.069	0.098	0.130	0.164
y_{n+1}	0.110	0.120	0.162	0.121	0.165	0.234	0.333	0.461	0.591
x_{n+1}	0.100	0.100	0.200	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$y_{n+1}' = f(x_{n+1}, y_{n+1})$	0.310	0.320	0.562	0.321	0.565	0.834	1.133	1.461	1.791

续表 3-7

	一级近似	二级近似		三级近似			正常计算		
n	0	0	1	0	1	2	3	4	5
y'_n				0.100	0.321	0.565	0.834	1.133	1.461
$+\frac{1}{2}\Delta y'_n$				0.110	0.122	0.134	0.149	0.164	0.165
$-\frac{1}{12}\Delta^2 y'_{n-1}$				−0.002	−0.002	−0.002	−0.002	−0.003	−0.000
$\pm\frac{1}{24}\Delta^3 y'_{n-1}$				(水平行) +0.000	(折行) +0.000	(折行) −0.000	−0.000	−0.000	−0.000
Σ				0.208	0.441	0.697	0.981	1.294	1.626
I $\Delta y_n = h\Sigma$				0.021	0.044	0.070	0.098	0.129	0.163

⑤在基本表格的“0”行内计算

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0 = 0.310 - 0.100 = 0.210$$

并写入一级近似的“0”行内。

3. 二级近似

①将 $x_0 = 0$，$y_0 = 0.1$，$y'_0 = 0.1$，填入基本表格的二级近似的“0”行内，利用一级近似所求得的 y'_0、y'_1 和 $\Delta y'_0$ 在辅助表格二级近似的“0”栏内计算

$$\Delta y_0 = h(y'_0 + \frac{1}{2}\Delta y'_0) = 0.1(0.100 + \frac{1}{2} \times 0.210) = 0.020$$

②计算 $\Delta y_1 = h(y'_1 + \frac{1}{2}\Delta y'_0) = 0.1(0.310 + \frac{1}{2} \times 0.210) = 0.042$

③计算 $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0.100 + 0.020 = 0.120$

④计算 $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 0.120 + 0.042 = 0.162$

⑤计算 $x_1 = x_0 + h = 0.1$

⑥计算 $x_2 = x_0 + 2h = 0.2$

⑦计算 $y'_1 = 2x_1 + y_1 = 0.2 + 0.120 = 0.320$

⑧计算 $y'_2 = 2x_2 + y_2 = 2 \times 0.2 + 0.162 = 0.562$

⑨、⑩、⑪计算

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0 = 0.320 - 0.100 = 0.220$$

$$\Delta y'_1 = y'_2 - y'_1 = 0.562 - 0.320 = 0.242$$

$$\Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0 = 0.022$$

4. 三级近似

①将 $x_0 = 0$，$y_0 = 0.100$，$y'_0 = 0.100$ 填入基本表格的三级近似的“0”行内，利用二级近似已计算出的 y'_0、$\Delta y'_0$、$\Delta^2 y'_0$ 在辅助表格计算 Δy_0

$$\Delta y_0 = h(y'_0 + \frac{1}{2}\Delta y'_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 y'_0)$$

$$= 0.1(0.100 + \frac{1}{2} \times 0.220 - \frac{1}{12} \times 0.022) = 0.021$$

②利用二级近似得出的 y_1'、$\triangle y_1'$、$\triangle^2 y_0'$ 在辅助表格上计算 $\triangle y_1$

$$\triangle y_1 = h(y_1' + \frac{1}{2}\triangle y_1' - \frac{1}{12}\triangle^2 y_0')$$

$$= 0.1(0.320 + \frac{1}{2} \times 0.242 - \frac{1}{12} \times 0.022)$$

$$= 0.044$$

③利用 y_2'、$\triangle y_1'$、$\triangle^2 y_0'$ 计算 $\triangle y_2$

$$\triangle y_2 = h(y_2' + \frac{1}{2}\triangle y_1' + \frac{5}{12}\triangle^2 y_0'$$

$$= 0.1(0.562 + \frac{1}{2} \times 0.242 + \frac{5}{12} \times 0.022)$$

$$= 0.069$$

④、⑤、⑥、⑦、⑧、⑨计算 y_1、y_2、y_3、x_1、x_2 和 x_3

$$y_1 = y_0 + \triangle y_0 = 0.100 + 0.021 = 0.121$$

$$y_2 = y_1 + \triangle y_1 = 0.121 + 0.044 = 0.165$$

$$y_3 = y_2 + \triangle y_2 = 0.165 + 0.069 = 0.234$$

$$x_1 = x_0 + h = 0.1$$

$$x_2 = x_0 + 2h = 0.2$$

$$x_3 = x_0 + 3h = 0.3$$

⑩、⑪、⑫在辅助表格内计算 y_1'、y_2'、y_3'，并填入基本表格中

$$y_1' = 2x_1 + y_1 = 0.2 + 0.121 = 0.321$$

$$y_2' = 2x_2 + y_2 = 0.4 + 0.165 = 0.565$$

$$y_3' = 2x_3 + y_3 = 0.6 + 0.234 = 0.834$$

⑬、⑭、⑮利用计算出的 y_0'、y_1'、y_2'、y_3' 来计算 $\triangle y_0'$、$\triangle y_1'$、$\triangle y_2'$

$$\triangle y_0' = y_1' - y_0' = 0.321 - 0.100 = 0.221$$

$$\triangle y_1' = y_2' - y_1' = 0.565 - 0.321 = 0.244$$

$$\triangle y_2' = y_3' - y_2' = 0.834 - 0.565 = 0.269$$

⑯、⑰、⑱是计算 $\triangle^2 y_0'$、$\triangle^2 y_1'$ 和 $\triangle^3 y_0'$

$$\triangle^2 y_0' = \triangle y_1' - \triangle y_0' = 0.244 - 0.221 = 0.023$$

$$\triangle^2 y_1' = \triangle y_2' - \triangle y_1' = 0.269 - 0.244 = 0.025$$

$$\triangle^3 y_0' = \triangle^2 y_1' - \triangle^2 y_0' = 0.025 - 0.023 = 0.002$$

在辅助表格中，三级近似“0”、“1”、“2”三栏的下方，用水平行、折行公式计算

$$\triangle y_0 = h(y_0' + \frac{1}{2}\triangle y_0' - \frac{1}{12}\triangle^2 y_0' + \frac{1}{24}\triangle^3 y_0')$$

$$= 0.1(0.100 + 0.110 - 0.002 + 0.000) = 0.021$$

$$\triangle y_1 = h(y_1' + \frac{1}{2}\triangle y_1' - \frac{1}{12}\triangle^2 y_1' + \frac{1}{24}\triangle^3 y_0')$$

$$= 0.1(0.321 + 0.122 - 0.002 + 0.000) = 0.044$$

$$\triangle y_2 = h\left(y_2' + \frac{1}{2}\triangle y_2' - \frac{1}{12}\triangle^2 y_1' - \frac{1}{24}\triangle^3 y_0'\right)$$

$$= 0.1(0.565 + 0.134 - 0.002 - 0.000) = 0.070$$

仅仅 $\triangle y_2$ 较原来计算的 $\triangle y_2$ 大 0.001，故须将基本表格内的 $\triangle y_2$ 及 y_3 加以修正（将 $\triangle y_2$ 的值修正为 0.070，y_3 的值修正为 0.235 。至此三级近似结束，转入正常计算。

正常计算 用斜行公式计算 $\triangle y_3$

$$\triangle y_3 = h\left(y_3' + \frac{1}{2}\triangle y_2' + \frac{5}{12}\triangle^2 y_1' + \frac{3}{8}\triangle^3 y_0'\right)$$

$$= 0.1(0.834 + 0.134 + 0.010 + 0.001) = 0.098$$

$$y_4 = y_3 + \triangle y_3 = 0.235 + 0.098 = 0.333$$

$$x_4 = x_0 + 4h = 0.4$$

在辅助表格的正常计算“3”栏内计算

$$y_4' = 2x_4 + y_4 = 0.8 + 0.333 = 1.133$$

将 y_4' 填入基本表格并计算

$$\triangle y_3' = y_4' - y_3' = 1.133 - 0.834 = 0.299$$

$$\triangle^2 y_2' = \triangle y_3' - \triangle y_2' = 0.299 - 0.269 = 0.030$$

$$\triangle^3 y_1' = \triangle^2 y_2' - \triangle^2 y_1' = 0.030 - 0.025 = 0.005$$

再利用折行公式在辅助表格“3”下部进行修正计算

$$\triangle y_3 = h\left(y_3' + \frac{1}{2}\triangle y_3' - \frac{1}{12}\triangle^2 y_2' - \frac{1}{24}\triangle^3 y_1'\right)$$

$$= 0.1(0.834 + 0.149 - 0.002 - 0.000) = 0.098$$

此值与原计算的 $\triangle y_3$ 的值完全相同，无须修正。以后第 5 点第 6 点等均按“斜行外推，折行校核”的方法继续计算下去，直到所有的积分区间积分完为止。

二、用差分法解弹道方程

在第二章的第二节中，我们已经引出了几种不同坐标系及不同自变量的弹丸质心运动的方程组。同时曾提到坐标系或者自变量的选定主要根据“为达到目的而又能用简单的方法”来确定的。因而在解火箭弹道与炮弹弹道时常用斜角坐标系或直角小抬高角坐标系；在解轰炸弹道时常用 y 轴铅直向下的直角坐标系。至于自变量视实际需要与计算方便而定，对航空弹道计算，通常应用较多的是距离或投弹高度作自变量。这是由于距离和高度比较容易测定，但在数值计算中也还有用时间 t 为自变量的，其主要是计算方便。总之，我们通常是把实际需要与计算方便当作选择运动方程组和自变量的依据。

至于自变量的间隔，主要根据计算所要求的准确度来确定。选择原则是，即使被删去的第一个差分及系数与间隔 h 的乘积的大小也不会影响到计算的准确度。

在解弹道问题时，所遇到的运动方程组其特点是各方程间有联立性，而不能单独一个一个地解。所以，在具体求解过程中也就将联立的几个方程式并列求解逐点计算。下面我们结合具体例题来讨论用差分法求解弹道方程的方法。

1. 计算空中射击弹道（应用直角小抬高坐标系）

已知数据：弹道系数 $c=1.5$；

高低角 $\varepsilon=30^\circ$；

射击高度 $H=3000$ 米；

瞄准角 $\alpha=26'$；

炮弹初速 $V_0=680$ 米/秒；

飞机速度 $V_1=320$ 米/秒。

求解全弹道及落点诸元。

解： 炮弹绝对初速

$$V_{01}=V_0+V_1=680+320=1000 \text{ 米/秒}$$

1） 方程组选择与自变量的间隔选择

采用直角小抬高角坐标系（如图 3-15 所示），取以 ξ 为自变量的方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{^*dV}{d\xi}=-CH_\tau(y)G(V_\tau)\cdot\frac{1}{\cos\varphi}-\frac{g\sin(\varphi+\varepsilon)}{V\cos\varphi}\\
&\frac{^*d\varphi}{d\xi}=-\frac{g\cos(\varepsilon+\varphi)}{V^2\cos\varphi}\\
&\frac{^*d\zeta}{d\xi}=\operatorname{tg}\varphi\\
&\frac{dt}{d\xi}=\frac{1}{V\cos\varphi}
\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}58)$$

上式参阅(2-17)式。

其中，$V_\tau=V\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}$，当 $H=3000$ 米时，查附表 3 得：$\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}=1.035$，

$$y=H+\xi\sin\varepsilon+\zeta\cos\varepsilon$$

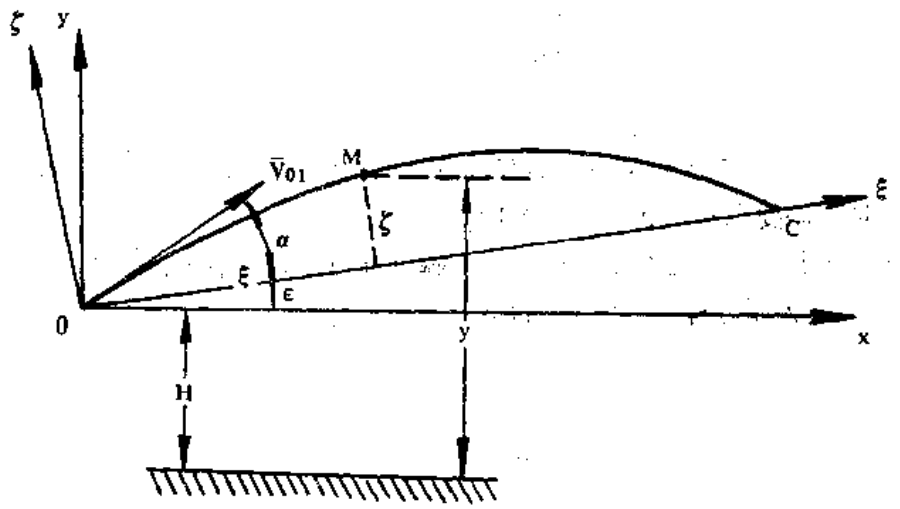


图 3-15 直角小抬高角坐标系

起始条件：$\xi=0$ 时，$V=V_{01}$，$\varphi=\alpha$，$\zeta=0$，$t=0$

根据已知数据进行起始计算

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)_0 = -CH_\tau(H)G(V_{01\tau})\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{g\sin(\alpha+\varepsilon)}{V_{01}\cos\alpha}$$

$$= -1.5\times H_\tau(3000)\times G(1035)\times \frac{1}{\cos 26'} - \frac{9.81\times\sin(30°26')}{1000\times\cos 26'}$$

$$= -1.5\times 0.7168\times 0.2723\times \frac{1}{0.9999} - \frac{9.81\times 0.5065}{1000\times 0.9999}$$

$$= -0.2927 - 0.0050 = -0.2977$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)_0 = -\frac{g\cos(\varepsilon+\varphi)}{V_{01}^2\cos\alpha}$$

$$= -\frac{9.81\times\cos 30°26'}{1000^2\cdot\cos 26'} = -\frac{9.81\times 0.8622}{1000^2\times 0.9999} = -0.000008458$$

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_0 = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 26' = 0.007563$$

$$\left(\frac{dt}{d\xi}\right)_0 = \frac{1}{V_{01}\cos\alpha} = \frac{1}{1000\times 0.9999} = 0.001000$$

取间隔 $h=100$ 米，一级近似算出速度间隔约为 30 米/秒，时间间隔为 0.1 秒。

2) 近似计算与正常计算

方程组 (3-58) 的前三个带 * 号的方程式需联立求解，而第四个方程式可在前三个方程式积分后再进行积分。第四式应用数值积分公式时可采用水平行与折行公式，不再需要修正。

具体计算按“6、用差分法解微分方程”部分所列的步骤进行，在此不再赘述，以表格的形式给出（见基本表格 3-6 及辅助表格 3-7）。

在辅助表格计算中，我们令

$$E = CH_\tau(y)G(V_\tau)\cdot\frac{1}{\cos\varphi}$$

$$F = \frac{g\sin(\varphi+\varepsilon)}{V\cos\varphi}$$

则有

$$V_t' = -E - F$$

在解微分方程组 (3-58) 的第一个方程式时，需要时时去查 $H_\tau(y)$ 和 $G(V_\tau)$，第二、三个方程求解时，需要和第一式合在一起联立求解。

由于抬高角 α 很小，因而在全弹道中任一瞬间速度 V 与 ξ 轴的夹角 φ 也很小，故有 $\operatorname{tg}\varphi\approx\varphi$（弧度），因而方程组 (3-58) 的第三式可改为

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \varphi$$

其余各式中的 $\cos\varphi\approx 1$。总的计算到 ξ 出现负值为止。

3)落点诸元的计算：

用数值积分法计算该弹道，一直计算到 ζ 出现负值为止。而在落点 C 处的 $\zeta=0$，现在需要根据反插值公式 (3-36) 来求自变量 ξ 的中间值 ξ_0（注意：这里是直角小抬高角坐标系的 ξ 轴上的 ξ_0 与反插值公式中的 ξ 指的不是同一个量，由于 ξ 是自变量，它却与 (3-29) 式的自变量 x 值相当），列出下列表格。

表 3-6　利用直角小抬高角坐标系计算射击弹道的基本表格（间隔h＝100米）

	n	ξ	V	ΔV	$V'\times10^2$	$\Delta V'\times10^2$	$\Delta^2V'\times10^2$	$\Delta^3V'\times10^2$
一级近似	0	0	1000	①−29.80	−29.77	⑤0.46		
	1	③100	②970.2		④−29.31			
二级近似	0	0	1000	①−29.54	−29.77	⑨0.46	⑪−0.01	
	1	⑥100	⑤970.5	②−29.10	⑦−29.31	⑩0.45		
	2	⑧200	④941.4		⑧−28.86			
三级近似	0	0	1000	①−29.5	−29.77	⑬0.46	⑯−0.01	⑱0.03
	1	⑦100	④970.5	②−29.1	⑩−29.31	⑭0.45	⑰ 0.02	−0.01
	2	⑧200	⑤941.4	③−28.6✓	⑪−28.86	⑮0.47	0.01	0.00
	3	⑨300	⑥912.8	$-28.\overset{1}{2}$	⑫−28.39	0.48	0.01	0.00
正常计算	4	400	$884.\overset{7}{6}$	$-27.\overset{7}{6}$	−27.91	0.49	0.01	0.00
	5	500	$857.\overset{0}{1}$	−27.2✓	−27.42	0.50	0.01	0.00
	6	600	829.8✓	−26.7✓	−26.92	0.51	0.01	−0.01
	7	700	803.1✓	−26.2✓	−26.41	0.52	0.00	0.04
	8	800	776.9✓	−25.6✓	−25.89	0.52	0.04	0.00
	9	900	751.3✓	−25.1✓	−25.37	0.56	0.04	−0.13
	10	1000	726.2✓	−24.5✓	−24.81	0.60	−0.09	0.16
	11	1100	701.7✓	$\overset{24.0}{-23.9}$	−24.21	0.51	0.07	−0.09
	12	1200	$677.\overset{7}{8}$	$-23.\overset{4}{5}$	−23.70	0.58	−0.02	
	13	1300	$654.\overset{3}{2}$	$-22.\overset{8}{7}$	−23.12	0.56		
	14	1400	$631.\overset{5}{6}$		−22.56			

表 3-6 （续）

	n	ξ	φ	$\varphi\times10^3$（弧度）	$\triangle\varphi\times10^3$	$\varphi'\times10^6$	$\triangle\varphi'\times10^6$	$\triangle^2\varphi'\times10^6$	$\triangle^3\varphi'\times10^6$
一级近似	0	0	26′	7.563	−0.845	−8.45	−0.53		
	1	100	23′	6.718		−8.98			
二级近似	1	0	26′	7.563	−0.872	−8.45	−0.53	−0.03	
	2	100	23′	6.691	−0.924	−8.98	−0.56		
	0	200	20′	5.767		−9.54			
三级近似	0	0	26′	7.563	−0.872	−8.45	−0.53	−0.03	−0.03
	1	100	23′	6.692	−0.926	−8.98	−0.56	−0.06	0.03
	2	200	20′	5.766	^{4}−0.983	−9.54	−0.62	−0.03	−0.04
	3	300	16′	^{2}4.783	^{48}−1.051	−10.16	−0.65	−0.07	0.01
正常计算	4	400	13′	^{4}3.731	^{6}−1.114	−10.81	−0.72	−0.06	0.00
	5	500	9′	^{18}2.620	^{2}−1.193	−11.53	−0.78	−0.06	−0.03
	6	600	5′	^{6}1.425	−1.272✓	−12.31	−0.84	−0.09	0.04
	7	700	1′	0.154✓	^{1}−1.360	−13.15	−0.93	−0.05	−0.04
	8	800	−5′	^{7}−1.206	^{7}−1.459	−14.08	−0.98	−0.09	0.00
	9	900	−9′	^{4}−2.685	^{9}−1.556	−15.06	−1.07	−0.09	−0.02
	10	1000	−14′	^{3}−4.220	^{0}−1.672	−16.13	−1.16	−0.11	0.00
	11	1100	−20′	^{3}−5.895	^{82}−1.791	−17.29	−1.27	−0.11	0.08
	12	1200	−26′	^{75}−7.684	^{4}−1.925	−18.56	−1.38	−0.03	
	13	1300	−33′	^{599}−9.609	^{4}−2.068	−19.94	−1.41		
	14	1400	−40′	^{3}−11.667		−21.35			

表 3-6 （续）

	n	ξ	ζ	$\triangle\zeta$	$\zeta'\times10^3$	$\triangle\zeta'\times10^3$	$\triangle^2\zeta'\times10^3$
一级近似	0	0	0	0.714	7.563	−0.845	
	1	100	0.714		6.718		
二级近似	0	0	0	0.713	7.563	−0.872	−0.052
	1	100	0.713	0.623	6.691	−0.924	
	2	200	1.336		5.767		
三级近似	0	0	0	0.713	7.563	−0.871	−0.056
	1	100	0.713	0.623	6.692	−0.928	−0.058
	2	200	1.336	0.528	5.766	−0.983[4]	−0.067
	3	300	1.864	0.426	4.782	−1.051[48]	−0.066
正常计算	4	400	2.290	0.318	3.734	−1.114[6]	−0.077
	5	500	2.608	0.203	2.618	−1.193[2]	−0.080
	6	600	2.811	0.080	1.426	−1.272✓	−0.088
	7	700	2.891	−0.052	0.154	−1.360[1]	−0.098
	8	800	2.839	−0.192	−1.207	−1.459[7]	−0.099
	9	900	2.646	−0.343	−2.664	−1.556[9]	−0.113
	10	1000	2.303	−0.496	−4.223	−1.672[0]	−0.121
	11	1100	1.807	−0.678	−5.893	−1.791[82]	−0.143
	12	1200	1.219	−0.862	−7.675	−1.925[4]	−0.144
	13	1300	0.267	−1.062	−9.599	−2.068[4]	
	14	1400	−0.795		−11.663		

表 3-6 （续）

	n	ξ	t	$\triangle t$	$t' \times 10^2$	$\triangle t' \times 10^2$	$\triangle^2 t' \times 10^2$
一级近似	0						
	1						
二级近似	0						
	1						
	2						
三级近似	0	0	0	0.1015	0.1000	0.0030	0.0003
	1	100	0.1015	0.1046	0.1030	0.0033	−0.0001
	2	200	0.2061	0.1079	0.1063	0.0032	0.0003
	3	300	0.3140	0.1113	0.1095	0.0035	0.0002
正常计算	4	400	0.4253	0.1148	0.1130	0.0037	0.0001
	5	500	0.5401	0.1186	0.1167	0.0038	0.0002
	6	600	0.6587	0.1225	0.1205	0.0040	0.0002
	7	700	0.7812	0.1266	0.1245	0.0042	0.0002
	8	800	0.9078	0.1309	0.1287	0.0044	0.0002
	9	900	1.0432	0.1354	0.1331	0.0046	0.0002
	10	1000	1.1786	0.1401	0.1377	0.0048	0.0002
	11	1100	1.3187	0.1450	0.1425	0.0050	0.0004
	12	1200	1.4637	0.1502	0.1475	0.0054	0.0001
	13	1300	1.6139	0.1557	0.1529	0.0055	
	14	1400	1.7696		0.1584		

	ξ	ζ	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$	$\Delta^3\zeta$
$n-2$	1100	1.807	−0.678	−0.184	−0.016
$n-1$	1200	1.219	−0.862	−0.200	
n	1300	0.267	−1.062		
$n+1$	1400	−0.795			

应用(3-29)式，令 $Z=\frac{\xi_0-\xi_n}{h}$ 再用式(3-34)，则改写为下式

$$Z=\frac{\zeta-\zeta_n}{\Delta\zeta_n}-Z(Z-1)\frac{\Delta^2\zeta_{n-1}}{2\Delta\zeta_n}-(Z+1)Z(Z-1)\frac{\Delta^3\zeta_{n-2}}{6\Delta\zeta_n}$$

第一次近似，取

$$Z_1=\frac{\zeta-\zeta_n}{\Delta\zeta_n}=\frac{0-0.267}{-1.062}=0.251$$

第二次近似式，则有

$$Z_2=Z_1-Z_1(Z_1-1)\frac{\Delta^2\zeta_{n-1}}{2\Delta\zeta_n}-(Z_1+1)Z_1(Z_1-1)\frac{\Delta^3\zeta_{n-2}}{6\Delta\zeta_n}$$

$$=0.251-0.251(0.251-1)\cdot\frac{-0.200}{2.(-1.062)}-(0.251+1)\cdot$$

$$0.251\cdot(0.251-1)\frac{-0.016}{6\cdot(-1.062)}$$

$$=0.251+0.0177+0.00059=0.269$$

第三次近似值

$$Z_3=Z_1-Z_2(Z_2-1)\frac{\Delta^2\zeta_{n-1}}{\Delta\zeta_n}-(Z_2+1)\cdot Z_2\cdot(Z_2-1)\frac{\Delta^3\zeta_{n-2}}{6\Delta\zeta_n}$$

$$=0.251-0.269(0.269-1)\cdot\frac{-0.200}{2\cdot(-1.062)}-(0.269+1)$$

$$\cdot 0.269\cdot(0.269-1)\cdot\frac{-0.016}{6\cdot(-1.062)}=0.251+0.0185+0.00063=0.270$$

第四次近似值

$$Z_4=Z_1-Z_3(Z_3-1)\frac{\Delta^2\zeta_{n-1}}{\Delta\zeta_n}-(Z_3+1)Z_3(Z_3-1)\frac{\Delta^3\zeta_{n-2}}{6\Delta\zeta_n}$$

$$=0.251-0.270(0.270-1)\cdot\frac{-0.200}{2\cdot(-1.062)}-(0.270+1)\cdot$$

$$0.270\cdot(0.270-1)\cdot\frac{-0.016}{6\cdot(-1.062)}$$

$$=0.251+0.0185+0.00063=0.270$$

则 $\xi_c=\xi_n++Zh=1300+0.270\times100=1327.0$ 米。

这样一来，就可由(3-34)式来求得落点处的炮弹速度V_c，列表写出ΔV、Δ^2V、Δ^3V各项。

表 3-7　利用直角小抬高角坐标系计算射击

n	0	0	1	0	1	2	3	4
$V_n^t\times10^2$	−29.77	−29.77	−29.31	−29.77	−29.31	−28.86	−28.39	−27.91
$\frac{1}{2}\Delta V_{n-1}^t\times10^2$		0.23	0.23	0.23	0.225	0.225	0.23	0.24
$\frac{5}{12}\Delta^2V_{n-2}^t\times10^2$				0.00	0.00	−0.004	0.000	0.0041
$\frac{3}{8}\Delta^3V_{n-3}^t\times10^2$				水平	折行	斜行	0.004	−0.004
$\Sigma\times10^2$	−29.77	−29.54	−29.08	−29.54	−29.08	−28.64	−28.16	−27.64
$\Delta V_n=h\Sigma$	−29.77	−29.54	−29.08	−29.54	−29.08	−28.64	−28.16	−27.64
$\varphi_n^t\times10^6$	−8.45	−8.45	−8.98	−8.45	−8.98	−9.54	−10.16	−10.81
$\frac{1}{2}\Delta\varphi_{n-1}^t\times10^6$		−0.265	−0.265	−0.265	−0.280	−0.280	−0.310	−0.325
$\frac{5}{12}\Delta^2\varphi_{n-2}^t\times10^6$				0.003	0.003	−0.012	−0.025	−0.012
$\frac{3}{8}\Delta^3\varphi_{n-3}^t\times10^6$							−0.011	0.011
$\Sigma\times10^6$	−8.45	−8.72	−9.24	−8.71	−9.26	−9.83	−10.51	−11.14
$(\Delta\varphi_n=h\Sigma)\times10^6$	−0.845	−0.872	−0.924	−0.871	−0.926	−0.983	−1.051	−1.114
$\zeta_n^t\times10^3$	7.563	7.563	6.691	7.563	6.692	5.766	4.782	3.734
$\frac{1}{2}\Delta\zeta_n^t\times10^3$	−0.422	−0.436	−0.462	−0.436	−0.463	−0.492	−0.526	−0.557
$-\frac{1}{12}\Delta^2\zeta_{n-1}^t\times10^3$			0.004	0.004	0.005	0.005	0.006	0.006
$\Sigma\times10^3$	7.141	7.127	6.233	7.131	6.234	5.279	4.262	3.183
$\Delta\zeta_n=h\Sigma$	0.714	0.713	0.623	0.713	0.623	0.582	0.426	0.318
y_{n+1}	3051	3051	3101	3051	3101	3152	3202	3252
$-E\times10^2$	−28.80	−28.80	−28.33	−28.80	−28.33	−27.85	−27.35	−26.85

弹道诸元辅助表格（间隔 h = 100 米）

5	6	7	8	9	10	11	12	13
−27.41	−26.92	−26.41	−25.89	−25.37	−24.81	−24.21	−23.70	−23.12
0.245	0.250	0.255	0.260	0.260	0.280	0.300	0.255	0.29
0.004	0.004	0.004	0.004	0.000	0.017	0.017	−0.038	0.029
0.000	0.000	0.000	0.000	−0.004	0.015	0.000	−0.045	0.060
−27.17	−26.67	−26.15	−25.63	−25.11	−24.50	−23.89	−23.53	−22.74
−27.17	−26.67	−26.15	−25.63	−25.11	−24.50	−23.89	−23.53	−22.74
−11.53	−12.31	−13.15	−14.08	−15.06	−16.13	−17.29	−18.56	−19.94
−0.360	−0.390	−0.420	−0.465	−0.490	−0.535	−0.58	−0.635	−0.690
−0.029	−0.025	−0.025	−0.038	−0.021	−0.038	−0.038	−0.046	−0.046
−0.015	0.004	0.000	−0.011	0.051	−0.015	0.000	−0.007	0.000
−11.93	−12.72	−13.60	−14.59	−15.56	−16.72	−17.91	−19.25	−20.68
−1.193	−1.272	−1.360	−1.459	−1.556	−1.672	−1.791	−1.925	−2.068
2.618	1.426	0.154	−1.207	−2.664	−4.223	−5.893	−7.673	−9.599
−0.596	−0.636	−0.680	−0.730	−0.778	−0.838	−0.896	−0.962	−1.034
0.006	0.007	0.007	0.008	0.008	0.094	0.010	0.012	0.012
2.028	0.797	−0.519	−1.929	−3.434	−4.965	−6.779	−8.625	−10.621
0.203	0.080	−0.052	−0.193	−0.343	−0.496	−0.678	−0.862	−1.062
3302	3352	3402	3452	3502	3552	3601	3650	3699
−26.33	−25.80	−25.26	−24.72	−24.14	−23.52	−22.99	−22.38	−21.80

表 3-7 （续）

n	0	0	1	0	1	2	3	4
$-F\times10^{2}$	−0.5109	−0.5107	−0.5257	−0.5107	−0.5257	−0.5412	−0.5575	−0.5741
$V_{n+\frac{1}{2}}\times10^{2}$	−29.31	−29.31	−28.86	−29.31	−28.86	−28.39	−27.91	−27.42
$\varphi'_{n+1}\times10^{6}$	−8.977	−8.976	−9.543	−8.976	−9.543	−10.16	−10.81	−11.53
$(\zeta'_{n+1}=\varphi_{n+1})\times10^{2}$	6.718	6.691	5.767	6.692	5.766	4.782	3.734	2.618
$V'_{n}\times10^{2}$						−28.86	−28.39	−27.91
$\frac{1}{2}\Delta V'_{n}\times10^{2}$						0.230	0.280	0.245
$-\frac{1}{12}\Delta^{2}V'_{n-1}\times10^{2}$						−0.000	−0.008	−0.001
$\Sigma\times10^{2}$						−28.62	−28.12	−27.67
ΔV_{n}修$=h\Sigma$						−28.62	−28.12	−27.67
$\varphi'_{n}\times10^{6}$						−9.54	−10.16	−10.81
$\frac{1}{2}\Delta\varphi'_{n}\times10^{6}$						−0.310	−0.325	−0.360
$-\frac{1}{12}\Delta^{2}\varphi'_{n-1}\times10^{6}$						0.005	0.002	0.006
$\Sigma\times10^{6}$						−9.84	−10.48	−11.16
$(\Delta\varphi_{n}$修$=h\Sigma)\times10^{3}$						−0.984	−1.048	−1.116
$t'_{n}\times10^{3}$				0.1000	0.1030	0.1063	0.1095	0.1130
$\frac{1}{2}\Delta t'_{n}\times10^{2}$				0.0015	0.00165	0.0016	0.0018	0.0018
$-\frac{1}{12}\Delta^{2}t'_{n}\times10^{2}$				0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$\Sigma\times10^{2}$				0.1015	0.1046	0.1079	0.1113	0.1148
$\Delta t_{n}=h\Sigma$				0.1015	0.1046	0.1079	0.1113	0.1148
t_{n}				0.0000	0.1015	0.2061	0.3140	0.4253

5	6	7	8	9	10	11	12	13
−0.5920	−0.6102	−0.6295	−0.6492	−0.6697	−0.6913	−0.7132	−0.7365	−0.7595
−26.92	−26.41	−25.89	−25.37	−24.81	−24.21	−23.70	−23.12	−22.56
−12.31	−13.15	−14.08	−15.06	−16.13	−17.29	−18.56	−19.94	−21.35
1.426	0.154	−1.207	−2.664	−4.223	−5.893	−7.675	−9.594	−11.663
−27.42	−26.92	−26.41	−25.89	−25.37	−24.81	−24.21	−23.70	−23.12
0.250	0.255	0.260	0.260	0.280	0.300	0.255	0.290	0.280
−0.001	−0.008	−0.001	−0.000	−0.003	−0.003	0.008	−0.006	0.002
−27.17	−26.66	−26.15	−25.63	−25.09	−24.51	−23.95	−23.42	−22.84
−27.17	−26.66	−26.15	−25.63	−25.09	−24.51	−23.95	−23.42	−22.84
−11.53	−12.31	−13.15	−14.08	−15.06	−16.13	−17.29	−18.56	−19.94
−0.390	−0.420	−0.465	−0.490	−0.535	−0.580	−0.635	−0.690	−0.705
0.005	0.005	0.008	0.004	0.008	0.008	0.010	0.010	0.002
−11.92	−12.72	−13.61	−14.57	−15.59	−16.70	−17.82	−19.24	−20.64
−1.192	−1.272	−1.361	−1.457	−1.559	−1.670	−1.782	−1.924	−2.064
0.1167	0.1205	0.1245	0.1287	0.1331	0.1377	0.1425	0.1475	0.1529
0.0019	0.0020	0.0021	0.0022	0.0023	0.0024	0.0025	0.0027	0.0028
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1186	0.1225	0.1266	0.1309	0.1354	0.1401	0.1450	0.1502	0.1557
0.1186	0.1225	0.1266	0.1309	0.1354	0.1401	0.1450	0.1502	0.1557
0.5401	0.6587	0.7812	0.9078	1.0432	1.1786	1.3187	1.4637	1.6139

	ξ	V	ΔV	$\Delta^2 V$	$\Delta^3 V$
$n-2$	1100	701.7	−24.0	0.6	0.0
$n-1$	1200	677.7	−23.4	0.6	
n	1300	654.3	−22.8		
$n+1$	1400	631.5			

再计算V_c：

$$V_c = V_n + Z\Delta V_n + \frac{Z(Z-1)}{2!}\Delta^2 V_{n-1} + \frac{(Z+1)Z(Z-1)}{3!}\Delta^3 V_{n-2}$$

$$= 654.3 + 0.270\times(-22.8) + \frac{0.27(0.27-1)}{3!}\times 0.6 + 0.0000$$

$$= 654.3 - 6.156 - 0.059 = 648.1 \text{ 米/秒。}$$

接着，再列表（如下表）由(3-34)式计算飞行到落点C的时间t_c（即炮弹的弹丸全飞行时间T）。

	ξ	t	Δt	$\Delta^2 t$	$\Delta^3 t$
$n-2$	1100	1.3187	0.1450	0.0052	0.0003
$n-1$	1200	1.4637	0.1502	0.0055	
n	1300	1.6139	0.1557		
$n+1$	1400	1.7696			

$$t_c = T = t_n + Z\Delta t_n + \frac{Z(Z-1)}{2}\Delta^2 t_{n-1} + \frac{(Z+1)Z(Z-1)}{6}\Delta^3 t_{n-2}$$

$$= 1.6139 + 0.27\times 0.1557 + \frac{0.27(0.27-1)}{2}\cdot 0.0055 +$$

$$\frac{(0.27+1)0.27(0.27-1)}{6}\cdot 0.0003$$

$$= 1.6139 + 0.042 - 0.0005 + 0.0000 = 1.6554 \text{ 秒。}$$

最后，再列表（如下表）由(3-34)式求在落点C处的ξ轴与速度的夹角φ_c（即落角ω）。

	ξ	$\varphi\times 10^3$	$\Delta\varphi\times 10^3$	$\Delta^2\varphi\times 10^3$	$\Delta^3\varphi\times 10^3$
$n-2$	1100	−5.893	−1.782	−0.142	−0.002
$n-1$	1200	−7.675	−1.924	−0.140	
n	1300	−9.599	−2.064		
$n+1$	1400	−11.663			

$$\varphi_c = \omega = \varphi_n + Z\triangle\varphi_n + \frac{Z(Z-1)}{2}\cdot\triangle^2\varphi_{n-1} + \frac{(Z+1)Z(Z-1)}{6}\triangle^3\varphi_{n-2}$$

$$= -9.599 + 0.27\times(-2.064) + \frac{0.27(0.27-1)}{2}(-0.140) +$$

$$\frac{(0.27+1)0.27\cdot(0.27-1)}{6}\cdot(-0.002)$$

$$= -9.599 - 0.557 + 0.0138 = -10.142 \text{ 毫弧度} \approx -35'$$

故得落点诸元如下：

$$\xi_c = 1327 \text{ 米}, \quad V_c = 648.1 \text{ 米/秒}$$

$$T = 1.66 \text{ 秒}, \quad \omega \approx -35'$$

2. 轰炸弹道计算（采用 y 轴铅直向下的直角坐标系）

已知数据：水平轰炸，飞机投弹瞬间速度 $V_1 = 300$ 米/秒；

炸弹弹道系数 $C = 0.601$；

标准落下时间 $\Theta = 21.50$ 秒（这个概念见第六章§ 5）；

投弹高度 $H = 3000$ 米。

求解全弹道及落点诸元。

解：1） 方程组与自变量间隔的选择

采用 y 轴铅直向下的直角坐标系（如图 3-16 所示），取以时间 t 为自变量的方程组：

$$\left.\begin{aligned}
&*\frac{du}{dt} = -CH_\tau(H-y)G(V_\tau)\cdot u\\
&*\frac{dw}{dt} = -CH_\tau(H-y)G(V_\tau)w + g\\
&\frac{dx}{dt} = u = V\cos\theta\\
&*\frac{dy}{dt} = w = V\sin\theta
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}59)$$

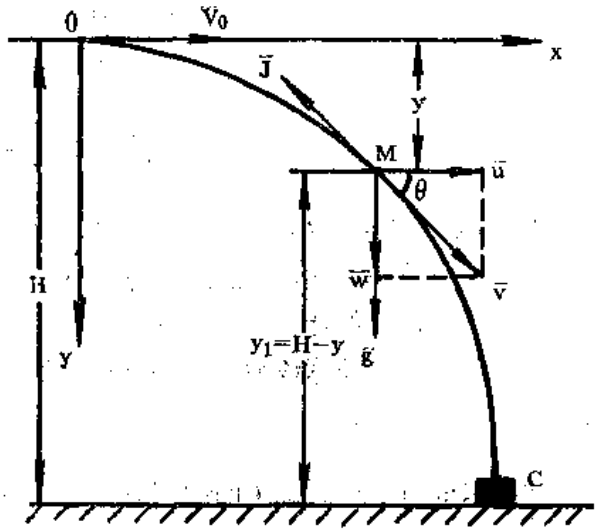


图 3-16 y 轴铅直向下的直角坐标系

联系方程：$V = \sqrt{u^2+w^2}$，

$$V_\tau = V\cdot\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}$$

初始条件：$t=0$ 时，$u = V_1 = 300$ 米/秒，$w=0$，$x=0$，$y=0$。

根据已知数据进行起始计算

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_0 = -CH_\tau(H)G(V_{1\tau})V_1$$

$$= -0.601\times0.7168\times0.0607\times300 = -7.847$$

其中，当 $H = 3000$ 米时，查附表 3 得 $\sqrt{\tau_{0N}/\tau} = 1.035$，有 $V_{1\tau} = V_1\cdot\sqrt{\tau_{0N}/\tau} = 300\times1.035 = 310.5$ 米/秒，再查附表 7 西亚切定律的 $G(V_\tau)$，则得 $G(_{1\tau}) = 0.0607$。取间隔 $h = 2$ 秒，由

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_0 = -7.847$$

则求得速度间隔约为 16 米/秒。

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_0 = g = 9.8$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = V_1 = 300$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0$$

2) 近似计算与正常计算

方程组 (3-59) 的各方程，除第三式以外需联立求解。具体计算仍按“6、用差分法解微分方程”部分所叙述的步骤进行，我们以表格的形式给出（见基本表格 3-8 及辅助表格 3-9）。

在所列表格计算中，我们令

$$CH_r(H-y)G(V_r) = E$$

则方程组 (3-59) 的第一、二式可分别写成

$$\frac{du}{dt} = u' = -Eu$$

及

$$\frac{dw}{dt} = w' = -Ew + g$$

另外，第三式 $x' = u$，则有 $\triangle x' = \triangle u$　$\triangle^2 x' = \triangle^2 u$。同样，第四式 $y' = w$，则有 $\triangle y' = \triangle w$，$\triangle^2 y' = \triangle^2 w$。分别列入基本表格（表 3-8），利用 (3-54)～(3-56) 式进行计算。

3) 落点诸元的计算

用数值积分法计算该弹道，一直计算到 $y \geqslant 3000$ 米为止。现在根据反插值公式 (3-34) 来计算落点的诸元。

利用反插值求自变量 t 的中间值，令 $\xi = \frac{T - t_n}{h}$，并列表：

	t	y	$\triangle y$	$\triangle^2 y$	$\triangle^3 y$
$n-2$	22.0	1995.2	368.9	23.3	−1.9
$n-1$	24.0	2364.1	392.2	21.4	
n	26.0	2756.3	413.6		
$n+1$	28.0	3169.9			

将式 (3-34) 改写为下式

$$\xi = \frac{y - y_n}{\triangle y_n} - \xi(\xi-1)\frac{\triangle^2 y_{n-1}}{2\triangle y_n} - (\xi+1)\xi(\xi-1)\frac{\triangle^3 y_{n-2}}{6\triangle y_n}$$

第一次近似取

$$\xi_1=\frac{H-y_n}{\triangle y_n}=\frac{3000-2756.3}{413.6}=\frac{243.7}{413.6}=0.589$$

二级近似值为

$$\xi_2=\xi_1-\xi_1(\xi_1-1)\frac{\triangle^2 y_{n-1}}{2\triangle y_n}-(\xi_1+1)\xi_1(\xi_1-1)\frac{\triangle^3 y_{n-2}}{6\triangle y_n}$$

$$=0.589-0.589(0.589-1)\frac{21.4}{2\times 413.6}-(0.589+1)\cdot$$

$$0.589\cdot(0.589-1)\frac{-1.9}{6\times 413.6}$$

$$=0.589+0.00626-0.000295=0.595$$

三级近似值为

$$\xi_3=\xi_1-\xi_2(\xi_2-1)\frac{\triangle^2 y_{n-1}}{2\triangle y_n}-(\xi_2+1)\xi_2(\xi_2-1)\cdot\frac{\triangle^3 y_{n-2}}{6\triangle y_n}$$

$$=0.589-0.595(0.595-1)\frac{21.4}{2\times 413.6}-(0.595+1)\cdot$$

$$0.595\cdot(0.595-1)\cdot\frac{-1.9}{6\times 413.6}$$

$$=0.589+0.00623-0.000294=0.595$$

则得炸弹落下时间为 $T=t_n+\xi h=26.0+0.595\times 2.00=27.90$ 秒。

这样一来，就可用 (3-34) 式来求得炸弹射程 A，列表写出 x、$\triangle x$、$\triangle^2 x$ 各项。

	t	x	$\triangle x$	$\triangle^2 x$
$n-2$	22.0	5423.8	395.6	−16.2
$n-1$	24.0	5819.4	379.6	−17.8
n	26.0	6198.8	361.6	
$n+1$	28.0	6560.4		

$$A=x_n+\xi\triangle x_n+\frac{\xi(\xi-1)}{2}\cdot\triangle^2 x_{n-1}$$

$$=6198.8+0.595\times 361.6+\frac{0.595(0.595-1)}{2}\times(-17.8)$$

$$=6198.8+215.2+2.14=6416.1\text{ 米。}$$

再计算炸弹落点的速度 V_c。首先计算 V_c 的水平分量 u_c，列表写出 u、$\triangle u$、$\triangle^2 u$ 各项。

	t	u	$\triangle u$	$\triangle^2 u$
$n-2$	22.0	201.8	−8.0	−0.4
$n-1$	24.0	193.8	−8.4	−0.9
n	26.0	185.4	−9.3	
$n+1$	28.0	186.1		

表 3-8　轰炸弹道计算的基本表格　h＝2秒

	n	t	$x'=u$				
			x	$\triangle x$	u	$\triangle u$	$\triangle^2 u$
一级近似	0	0	0		300	−15.7	
	1	2.0			284.3		
二级近似	0	0	0		300	−13.6	3.2
	1	2.0			286.4	−10.4	
	2	4.0			276.0		
三级近似	0	0	0	585.4①	300	−14.0	2.9
	1	2.0	585.4	560.4	286.0	−11.1	3.0
	2	4.0	1145.8	541.8	274.9	8.1 −9.9	−0.7
	3	6.0	1687.6	524.8	6.8 265.0	8 −8.6	0.3
正常计算	4	8.0	2212.4	507.4	0 258.2	5 −8.6	0.4
	5	10.0	2719.8	490.8	5 249.4	8.1 −7.8	0.1
	6	12.0	3210.6	474.6	4 241.7	0 −8.2	0.1
	7	14.0	3685.2	458.8	4 233.2	9 −7.7	0.0
	8	16.0	4144.0	443.0	5 225.7	7.9 −8.1	0.0
	9	18.0	5487.0	425.2	6 217.4	9 −7.8	0.0
	10	20.0	5012.2	411.6	7 209.8	−7.9✓	−0.1
	11	22.0	4523.8	395.6	201.8✓	−8.0	−0.4
	12	24.0	5819.4	379.4	193.8✓	4 −8.2	−0.9
	13	26.0	6198.8	381.6	4 185.6	3 −9.7	
	14	28.0	6560.4		186.1 175.7		

表 3-8 （续）

	n	t	$u'=-Eu$			
			u'	$\triangle u'$	$\triangle^2 u'$	$\triangle^3 u'$
一级近似	0	0	−7.847	2.083	—	—
	1	2.0	−5.784	—	—	—
二级近似	0	0	−7.847	1.765	−0.872	—
	1	2.0	−6.082	0.938	—	—
	2	4.0	−5.144	—	—	—
三级近似	0	0	−7.847	1.825	−0.863	0.472
	1	2.0	−6.022	0.962	−0.436	0.075
	2	4.0	−5.060	0.526	−0.361	0.435
	3	6.0	−4.534	0.165	0.074	−0.217
正常计算	4	8.0	−4.369	0.239	−0.143	0.138
	5	10.0	−4.130	0.096	−0.005	−0.093
	6	12.0	−4.034	0.091	−0.098	0.107
	7	14.0	−3.943	−0.007	−0.009	−0.014
	8	16.0	−3.950	0.002	−0.005	−0.011
	9	18.0	−3.948	−0.003	−0.016	−0.032
	10	20.0	−3.951	−0.019	−0.048	−0.267
	11	22.0	−3.970	−0.067	−0.315	0.249
	12	24.0	−4.037	−0.382	−0.066	
	13	26.0	−4.419	−0.448		
	14	28.0	−3.971			

表 3-8 （续）

	n	t	$y'=w$				
			y	$\triangle y$	w	$\triangle w$	$\triangle^2 w$
一级近似	0	0	0	19.60	0	19.60	—
	1	2.0	19.60	—	19.60	—	—
二级近似	0	0	0	19.20	0	19.20	−0.81
	1	2.0	19.20	57.74	19.20	18.39	—
	2	4.0	76.84	—	37.59	—	—
三级近似	0	0	0	19.34	0	19.17	−0.68
	1	2.0	19.34	56.94	19.17	18.49	−0.47
	2	4.0	76.28	93.40	37.66	7.95 18.02	−0.56
	3	6.0	169.68	128.7	1 55.68	42 17.39	−0.63
正常计算	4	8.0	298.40	163.0	3 73.00	87 73.79	−0.44
	5	10.0	361.40	196.3	90 89.82	34 16.43	−0.65
	6	12.0	557.70	228.3	4 106.22	76 15.69	−0.57
	7	14.0	786.00	259.3	2.00 121.93	5 15.19	−0.78
	8	16.0	1045.3	288.8	5 137.19	45 14.37	−0.68
	9	18.0	1334.1	317.1	60 151.52	4 13.77	−0.75
	10	20.0	1651.2	344.0	4 165.37	7 12.99	−0.89
	11	22.0	1995.2	368.9	1 178.33	11 12.08	−0.91
	12	24.0	2364.1	392.2	42 190.39	22 11.20	−1.10
	13	26.0	2756.3	413.6	4 201.62	8 10.32	
	14	28.0	3169.9		2.02 211.96		

表 3-8 （续）

	n	t	$w'=-Ew+g$			
			w'	$\triangle w'$	$\triangle^2 w'$	$\triangle^3 w'$
一级近似	0	0	9.8	−0.399	—	—
	1	2.0	9.401	—	—	—
二级近似	0	0	9.8	−0.408	0.115	—
	1	2.0	9.392	−0.293	—	—
	2	4.0	9.099	—	—	—
三级近似	0	0	9.8	−0.404	0.115	−0.086
	1	2.0	9.396	−0.289	0.029	−0.040
	2	4.0	9.107	−0.260	−0.022	0.047
	3	6.0	8.847	−0.282	0.029	−0.061
正常计算	4	8.0	8.565	−0.253	−0.032	0.031
	5	10.0	8.312	−0.286	−0.001	−0.052
	6	12.0	8.026	−0.287	0.053	0.043
	7	14.0	7.739	−0.340	−0.010	−0.004
	8	16.0	7.399	−0.350	−0.014	−0.031
	9	18.0	7.049	−0.364	−0.045	0.009
	10	20.0	6.658	−6.409	−0.034	0.025
	11	22.0	6.276	−0.443	−0.009	−0.090
	12	24.0	5.833	−0.452	0.081	
	13	26.0	5.381	−0.371		
	14	28.0	5.010			

表 3-9 轰炸弹道计算

n	0	0	1	0	1	2	3	4
u_n^l	−7.847	−7.847	−6.082	−7.847	−6.082	−5.060	−4.534	−4.369
$\frac{1}{2}\Delta u_{n-1}^l$		1.032	0.882	0.882	0.469	0.481	0.263	0.082
$\frac{5}{12}\Delta^2 u_{n-2}^l$				0.069	0.069	−0.361	−0.182	−0.050
$\frac{3}{8}\Delta^3 u_{n-3}^l$				水 平	折 行	斜 行	0.160	0.028
Σ	−7.847	−6.815	−5.200	−6.996	−5.544	−4.940	−4.293	−4.309
$\Delta u_n = h\Sigma$	−15.69	−13.63	−10.40	−13.99	−11.09	−9.88	−8.586	−8.62
w_n^l	9.8	9.8	9.392	9.8	9.392	9.107	8.847	8.565
$\frac{1}{2}\Delta w_{n-1}^l$		−0.200	−0.204	−0.204	−0.146	−0.144	−0.130	−0.141
$\frac{5}{12}\Delta^2 w_{n-3}^l$				−0.0096	−0.0096	0.048	−0.012	−0.009
$\frac{3}{8}\Delta^3 w_{n-3}^l$							−0.032	−0.018
Σ	9.80	9.60	9.188	9.586	9.246	9.011	8.697	8.397
$\Delta w_n = h\Sigma$	19.6	19.20	18.39	19.17	18.492	18.022	17.39	16.79
w_n	0	0	19.20	0	19.17	37.66	55.81	73.03
$\frac{1}{2}\Delta w_n$	9.80	9.60	9.60	9.60	9.24	9.01	8.695	8.395
$-\frac{1}{12}\Delta^2 w_{n-1}$			0.070	0.068	0.057	0.040	0.047	0.052
$-\frac{1}{24}\Delta^3 w_{n-2}$						−0.01	−0.008	0.006
Σ	9.80	9.60	28.87	9.67	28.47	46.70	64.34	81.48
$\Delta y_n = h\Sigma$	19.60	19.20	57.74	19.34	56.94	93.40	128.68	162.96
$H - y_{n+1}$	2980	2981	2922	2981	2924	2830	2702	2639
$H_\varphi(H - y_{n+1})$	0.7184	0.7184	0.7232	0.7184	0.7235	0.7308	0.7416	0.7470
$\sqrt{\tau_{0x}/\tau}$	1.035	1.035	1.034	1.035	1.034	1.032	1.030	1.030
$u_{n+1}^2 \times 10^{-4}$	8.07	8.22	7.62	8.19	7.57	7.02	6.67	6.22
$w_{n+1}^2 \times 10^{-4}$	0.0385	0.0369	0.142	0.037	0.142	0.311	0.532	0.808
$V_{n+1}^2 \times 10^{-4}$	8.108	8.257	7.762	8.227	7.712	7.331	7.202	7.028

的辅助表格（h＝2 秒）

5	6	7	8	9	10	11	12	13
−4.130	−4.034	−3.943	−3.950	−3.948	−3.951	−3.970	−4.037	−4.419
0.120	0.048	0.046	0.004	0.001	−0.0015	−0.0095	−0.0335	−0.191
0.031	−0.059	−0.002	−0.041	0.004	−0.0031	−0.0067	−0.020	−0.131
0.163	−0.081	0.0516	−0.036	0.040	−0.0052	−0.0041	−0.012	−0.100
−3.917	−4.126	−3.847	−4.030	−3.903	−3.961	−3.990	−4.103	−4.841
−7.834	−8.23	−7.694	−8.06	−7.81	−7.92	−7.98	−8.21	−9.68
8.312	8.026	7.739	7.399	7.049	6.685	6.278	5.833	5.381
−0.1265	−0.143	−0.144	−0.170	−0.175	−0.182	−0.2045	−0.222	−0.228
−0.0121	−0.013	−0.0004	−0.022	−0.004	−0.006	−0.018	−0.014	−0.004
0.018	−0.023	0.011	−0.020	0.016	−0.0015	−0.0116	0.0034	0.009
8.216	7.847	7.596	7.187	6.886	6.495	6.041	5.600	5.160
16.43	15.69	15.192	14.374	13.77	13.99	12.08	11.20	10.32
89.90	106.24	122.00	137.15	151.60	165.34	178.31	190.42	201.64
8.215	7.845	7.60	7.18	6.88	6.50	6.04	5.60	5.16
0.0367	0.054	0.050	0.065	0.060	0.182	0.074	0.080	0.092
−0.008	0.009	−0.002	0.008	−0.005	0.003	0.006	0.001	0.008
98.14	114.14	129.65	144.40	158.54	172.03	184.43	196.10	206.80
196.30	228.28	259.30	288.80	317.10	344.05	368.90	392.20	413.60
2442	2214	1955	1666	1349	1005	636	243.7	−169.9
0.7839	0.7837	0.8071	0.8338	0.8634	0.8968	0.9338	0.9744	1.0000
1.028	1.025	1.022	1.019	1.015	1.012	1.007	1.002	1.0000
5.84	5.42	5.10	4.73	4.38	4.08	3.77	3.44	3.09
1.124	1.486	1.886	2.30	2.74	3.18	3.63	4.07	4.50
6.964	6.906	6.986	7.03	7.12	7.26	7.40	7.52	7.59

表 3-9 （续）

n	0	0	1	0	1	2	3	4
V_{n+1}	284.7	287.3	278.6	286.8	277.7	270.8	268.4	265.1
$(V_{n+1})_{\pi}$	294.6	297.3	288.1	296.8	287.1	279.5	276.5	273.1
$G(V_{\pi})_{n+1}$	0.0470	0.0490	0.0429	0.0469	0.0423	0.0388	0.0379	0.0369
u_{n+1}	284.1	286.7	276.0	286.2	275.1	265.0	258.3	249.4
C	0.601	0.601	0.601	0.601	0.601	0.601	0.601	0.601
Σ	0.7622	0.7841	0.7113	0.7797	0.7042	0.6565	0.6404	0.6160
u'_{n+1}	−5.784	−6.082	−5.144	−6.022	−5.060	−4.534	−4.369	−4.130
w_{n+1}	19.6	19.2	37.7	19.2	37.7	55.7	72.9	89.9
$-Ew_{n+1}$	−0.3987	−0.4078	−0.7007	−0.4035	−0.6934	−0.9528	−1.235	−1.488
$w'_{n+1}=-Ew_n+g$	9.401	9.392	9.099	9.396	9.107	8.847	8.565	8.312
u'_n						−5.060	−4.534	−4.369
$\frac{1}{2}\Delta u'_n$						0.263	0.082	0.120
$-\frac{1}{12}\Delta^3 u'_{n-1}$						0.036	0.030	−0.006
Σ						−4.061	−4.422	−4.255
Δu_n修$=h\Sigma$						−8.120	−8.840	−8.510
w'_n						9.107	8.847	8.565
$\frac{1}{2}\Delta w'_n$						−0.130	−0.141	−0.126
$-\frac{1}{12}\Delta^3 w'_{n-1}$						−0.002	0.002	−0.002
Σ						8.975	8.708	8.437
Δw_n修$=h\Sigma$						17.95	17.42	16.87
u_n				300	286.0	274.9	266.8	258.0
$\frac{1}{2}\Delta u_n$				−7.0	−5.55	−4.05	−4.4	−4.25
$-\frac{1}{12}\Delta^3 u_n$				−0.24	−0.25	0.058	−0.025	−0.033
Σ				292.7	280.2	270.9	262.4	253.7
$\Delta x_n=h\Sigma$				585.4	560.4	541.8	524.8	507.4

5	6	7	8	9	10	11	12	13
263.9	262.8	264.3	265.1	266.8	269.4	272.0	274.2	275.5
271.3	269.4	270.1	270.1	270.8	272.6	273.9	274.7	275.5
0.0363	0.0359	0.0361	0.0361	0.0363	0.0367	0.0372	0.0373	0.0378
241.7	232.8	225.8	217.5	209.3	202.0	194.2	185.5	175.8
0.601	0.601	0.601	0.601	0.601	0.601	0.601	0.601	0.601
0.6058	0.5958	0.5966	0.5963	0.5967	0.5988	0.6061	0.6093	0.5989
−4.034	−3.943	−3.950	−3.948	−3.951	−3.970	−4.037	−4.067	−3.971
106.0	121.9	137.3	151.7	165.5	178.3	190.5	201.7	212.1
−1.774	−2.061	−2.401	−2.751	−3.115	−3.524	−3.967	−4.419	−4.790
8.026	7.739	7.399	7.049	6.685	6.276	5.833	5.381	5.010
−4.130	−4.034	−3.943	−3.950	−3.948	−3.951	−3.970	−4.037	−4.419
0.048	0.046	−0.0037	0.001	−0.002	−0.0095	−0.034	−0.191	−0.224
0.012	0.0004	0.008	−0.0008	0.0004	0.0013	0.004	0.026	0.008
−4.070	−3.988	−3.939	−3.950	−3.950	−3.943	−4.000	−4.202	−4.637
−8.140	−7.976	−7.880	−7.900	−7.900	−7.890	−8.000	−8.400	−9.274
8.312	8.026	7.739	7.399	7.049	6.685	6.276	5.833	5.381
−0.143	−0.144	−0.170	−0.175	−0.182	−0.2045	−0.222	−0.226	−0.186
0.003	0.0001	0.004	0.001	0.001	0.0038	0.003	0.0008	0.007
8.172	7.882	7.572	7.225	6.868	6.484	6.057	5.608	5.188
16.34	15.76	15.15	14.45	13.74	12.97	12.11	11.22	10.38
249.5	241.4	233.4	225.5	217.6	209.7	201.8	193.8	185.4
−4.05	−4.0	−3.95	−3.95	−3.95	−3.95	−4.0	−4.2	−4.65
−0.008	−0.008	−0.00	−0.00	−0.00	0.008	0.033	0.058	0.058
245.4	237.3	219.4	221.5	213.6	205.8	197.8	189.7	180.8
490.8	474.6	458.8	443.0	426.2	411.6	395.6	379.4	361.6

$$u_c = u_n + \xi\triangle u_n + \frac{\xi(\xi-1)}{2}\triangle^2 u_{n-1}$$

$$= 185.4 + 0.595\times(-9.3) + \frac{0.595(0.595-1)}{2}\times(-0.9)$$

$$\approx 185.4 - 5.53 + 0.1084 = 179.98 \text{ 米/秒。}$$

接着计算 V_c 的垂直分量 w_c，列表写出 w，$\triangle w$，$\triangle^2 w$ 各项。

	t	w	$\triangle w$	$\triangle^2 w$
$n-2$	22.0	178.31	12.11	−0.89
$n-1$	24.0	190.42	11.22	−0.64
n	26.0	201.64	10.38	
$n+1$	28.0	212.02		

$$w_c = w_n + \xi\triangle w_n + \frac{\xi(\xi-1)}{2}\cdot\triangle^2 w_{n-1}$$

$$= 201.64 + 0.595\times 10.38 + \frac{0.595(0.595-1)}{2}\times(-0.64)$$

$$= 201.64 + 6.18 + 0.077 = 207.90 \text{ 米/秒。}$$

则炸弹落点的速度 V_c 为

$$V_c = \sqrt{u_c^2 + w_c^2} = \sqrt{179.98^2 + 207.90^2}$$

$$= \sqrt{75615.2} = 274.98 \text{ 米/秒。}$$

和落角 θ_c 为

$$tg\theta_c \approx \frac{w_c}{u_c} = \frac{207.90}{179.98} = 1.155$$

$$\theta_c = 49°07'$$

故得炸弹落点诸元如下：

落下时间　$T = 27.90$ 秒；

炸弹射程　$A = 6416.1$ 米；

落　　速　$V_c = 274.98$ 米/秒；

落　　角　$\theta_c = 49°07'$。

§4 龙格——库塔法

一、龙格——库塔法的数学基础

在科学技术上所遇到的一些实际问题，当能归结用数学形式来表示时，很大一部分是微分方程的问题。在高等数学中已学过了一些微分方程的分析解法，但实用上许多很有价值的微分方程，它们的解往往不能用初等函数来表达，常常需要求其数值解。常微分方程的定解问题分为两类：初值问题和边值问题，边值问题一般都可以化成初值问题求解。对微分方程

的初值问题，主要考虑一阶方程的情况，假定微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \tag{3-60}$$

及初始条件

$$y(x_0)=y_0 \tag{3-61}$$

所谓初值问题的数值解，就是求问题的解 $y(x)$ 在一系列点

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<\cdots<x_n<\cdots$$

上的值 $y(x_i)$ 的近似值 y_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots)$。

取两个相邻的点 x_n，x_{n+1}，考虑对 (3-60) 式两端积分，可有

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'dx=\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,\ y)dx$$

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,\ y)dx \tag{3-62}$$

在该式 (3-62) 的右端被积函数 $f(x,\ y)$ 中，$y(x)$ 未知，这个积分不能用解析法求解，只好用数值法求近似解。

在用数值法求 (3-62) 式的积分时，如果采用矩形法计算该定积分的近似值，就是所谓欧拉法，得出欧拉法公式：

$$y_{n+1}=y_n+f(x_n,\ y_n)(x_{n+1}-x_n) \tag{3-63}$$

在 (3-63) 式中，取 $x_{n+1}-x_n=h$（定步长），则有

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1}&=y_n+h\cdot f(x_n,\ y_n)\\ x_n&=x_0+nh \end{aligned}\right\} \tag{3-64}$$

如果采用梯形法计算 (3-62) 式的积分近似值，就是改进的欧拉法，得出改进欧拉法的计算公式

$$\left.\begin{aligned} &y_{n+1}^{(0)}=y_n+hf(x_n,\ y_n) \qquad \text{（予报公式）}\\ &y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}h[f(x_n,\ y_n)+f(x_{n+1},\ y_{n+1}^{(0)})] \qquad \text{（校正公式）} \end{aligned}\right\}$$

或写成

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1}&=y_n+\frac{1}{2}K_1+\frac{1}{2}K_2\\ K_1&=h\cdot f(x_n,\ y_n)\\ K_2&=h\cdot f(x_n+h,\ y_n+K_1) \end{aligned}\right\} \tag{3-65}$$

根据 (3-65) 迭代公式的处理方法，我们可以把欧拉法的迭代公式 (3-64) 改写成下式

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1}&=y_n+K_1\\ K_1&=h\cdot f(x_n,\ y_n) \end{aligned}\right\} \tag{3-66}$$

上述两组公式在形式上有一个共同点：都是用 $f(x,\ y)$ 在某些点上的值的线性组合，得出 $y(x_{n+1})$ 的近似值 y_{n+1}，而且看出，改进欧拉法比欧拉法增加了计算 $f(x,\ y)$ 的次数，从而提高了计算精度。在微分方程的数值解法中，经常采用的是一种既能进一步提高计算精度、又能使计算量不显著加大的方法，即所谓龙格—库塔法。

龙格—库塔法是采用抛物线法（也就是辛浦生法）计算 (3-62) 式的积分，其基本思想

也是企图用 $f(x,\ y)$ 在某些点 $(x_n+\mu_i h,\ y_n+b_i h)$ 上的值的线性组合：

$$y_{n+1}=y_n+h\{a_0 f[x_n,\ y(x_n)]+a_1 f(x_n+\mu_1 h,\ y_n+b_1 h)+\cdots+a_{p-1}f(x_n+\mu_{p-1}h,\ y_n+b_{p-1}h)\} \tag{3-67}$$

来代替 $y(x_{n+1})$。我们知道，$y(x_{n+1})$ 的台劳展开式为

$$y(x_{n+1})=y_n+\frac{h}{1!}y'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\cdots+\frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x_n)+0(h^{p+1}) \tag{3-68}$$

将式(3-67)右端按 x_n 展开台劳级数后，使其前 $p+1$ 项与式(3-68)的前 $p+1$ 项完全相等，这样截断误差就为 $0(h^{p+1})$。按上述要求可以确定各系数 α、μ 和 b 的值，从而得出数值解法的计算公式——龙格·库塔公式，若取 $p=1$，得出一阶的龙格·库塔公式，就是欧拉法的计算公式。若取 $p=2$，得出二阶的龙格·库塔公式，这便是改进的欧拉法计算公式。最常用的龙格—库塔公式是取 $p=4$，其迭代格式为

$$\left.\begin{aligned}
&y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)\\
&K_1=h\cdot f(x_n,\ y_n)\\
&K_2=h\cdot f\left(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{K_1}{2}\right)\\
&K_3=h\cdot f\left(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{K_2}{2}\right)\\
&K_4=h\cdot f(x_n+h,\ y_n+K_3)
\end{aligned}\right\} \tag{3-69}$$

通常把(3-69)，称为龙格—库塔公式。它的截断误差为 $0(h^5)$。图 3-17 画出了龙格—库塔

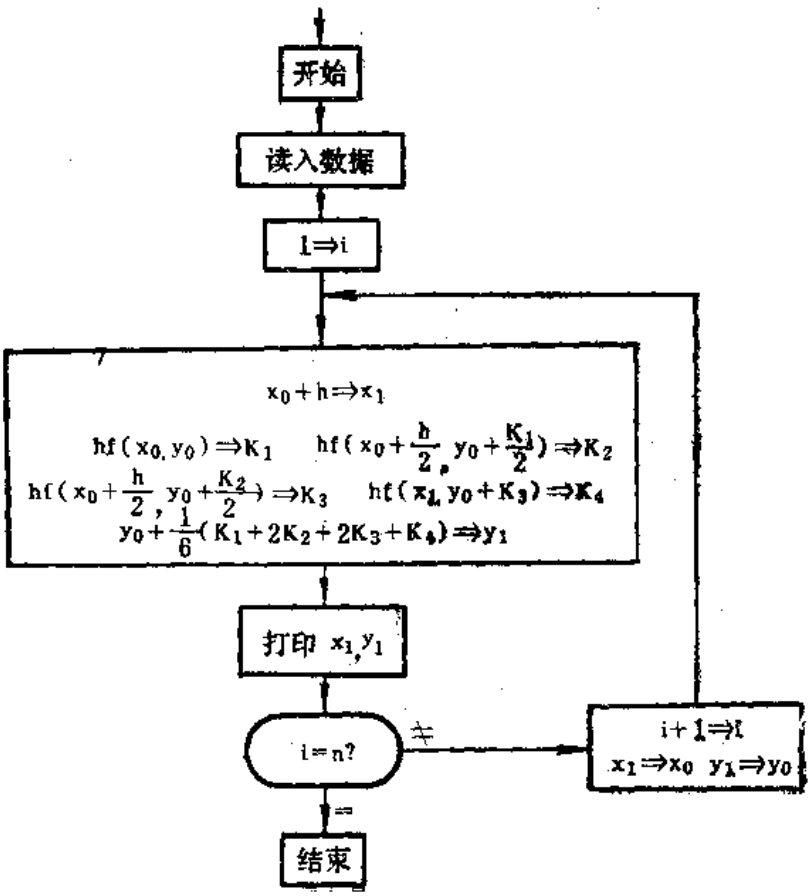


图 3-17 龙格—库塔法的程序框图

法的程序框图。

龙格—库塔法的主要优点是，计算精度较高，能满足通常的计算要求；每次计算 y_{n+1}，只用到前一步的计算结果 y_n，因此，在已知初始值 y_0 的条件下，就可用它自动地进行计算；计算过程中改变步长不受限制。它的缺点是每步计算需要计算四次 $f(x, y)$ 的值，因此计算工作量较大。如果采用电子计算机编写程序，即使计算工作量大，也无济于事。关于射击和轰炸弹道的计算与 FORTRAN 语言程序设计中所用到的龙格—库塔法有关内容将放在第八章作专题讲述。而用手算时可按表 3-10 所示的顺序进行。

表 3-10　龙格——库塔法的手算顺序

x	y	$h \cdot f(x,y)$	$\triangle y$
x_0	y_0	$K_1 = h \cdot f(x_0, y_0)$	$\triangle y = \frac{1}{6}[K_1 + 2(K_2 + K_3) + K_4]$
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_1}{2}$	$K_2 = h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2})$	
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{K_2}{2}$	$K_3 = h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2})$	
$x_0 + h = x_1$	$y_0 + K_3$	$K_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + K_3)$	
x_1	y_1	…	…
⋮	⋮	…	…

二、计算举例

已知微分方程

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

在初始条件 $x_0 = 0$，$y_0 = 1.000$ 时，求从 $x = 0$ 到 $x = 1$ 各结点上的数值解（取步长 $h = 0.2$）。

解：用龙格—库塔公式 (3-69) 进行计算，因有

$$\triangle y = \frac{1}{6}[K_1 + 2(K_2 + K_3) + K_4]$$

则各结点计算如下：

第一点：

$$K_{01} = 0.2 \times f(x_0,\ y_0) = 0.2 \times (1.000 - \frac{2 \times 0}{1.000}) = 0.2000000$$

$$K_{02} = 0.2 \times f(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{K_{01}}{2}) = 0.2 \times (1.100 - \frac{2 \times 0.1}{1.100}) = 0.1836364$$

$$K_{03} = 0.2 \times f(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{K_{02}}{2}) = 0.2 \times (1.0918 - \frac{2 \times 0.1}{1.092} = 0.1817301$$

$$K_{04} = 0.2 \times f(x_0 + h,\ y_0 + K_{03}) = 0.2 \times (1.1817 - \frac{2 \times 0.2}{1.182}) = 0.1686409$$

$$\triangle y_0 = \frac{1}{6}[0.2000000 + 2(0.1836364 + 0.1817301) + 0.1686409] = 0.183229$$

$$y_1 = y_0 + \triangle y_0 = 1.183229,\ x_1 = x_0 + h = 0.2$$

同样可计算出第二点（x_2，y_2）、第三点（x_3，y_3）、第四点（x_4，y_4）和第五点（x_5，y_5），现将计算结果列表如下（表 3-11），并与改进欧拉法的解和精确的分析解进行比较。

表 3-11

x_i	y_i		
	改进欧拉法	龙格—库塔法	精确分析解
0	1	1	1
0.2	1.184096	1.183229	1.183216
0.4	1.343360	1.341667	1.341641
0.6	1.485956	1.483281	1.483240
0.8	1.616476	1.612513	1.612452
1.0	1.737869	1.732140	1.732051

由表 3-11 的结果，可以明显地看出，龙格—库塔法的精确度确实较高。用于工程计算上，可以说是令人满意的。同样，用于弹道的计算上，也是很适合的。

下面针对此例，用 FORTRAN 语言编写程序，在电子计算机进行计算，龙格—库塔法更显出了它的优越性。具体的 FORTRAN 语言程序如下：

```
      DIMENSION  X(5), Y(5)
      XO=0.
      YO=1.
      IO=0
      CALL RNGK (XO, 1.0, YO, X, Y, 5)
      WRITE (108, 1) IO, XO, YO, (I, X(I), Y(I), I=1, 5)
1     FORMAT(/40X, I2, F10.2, F14.6)
      STOP
      END

      FUNCTION FUN(X, Y)
      FUN=Y-2.0*X/Y
      RETURN
      END

      SUBROUTINE RNGK(A, B, YA, X, Y, N)
      DIMENSION X(N), Y(N)
      AN=N
      H=(B-A)/AN
      HALF=H*0.5
      X1=A
      Y1=YA
      DO 10 I=1, N
```

```
      YO = Y1
      XO = X1
      X1 = XO + H
      X2 = XO + HALF
      H1 = FUN(XO, YO) * H
      H2 = FUN(X2, YO + H1 * 0.5) * H
      H3 = FUN(X2, YO + H2 * 0.5) * H
      H4 = FUN(X1, Y + H3) * H
      Y1 = YO + (H1 + 2.0 * H2 + 2.0 * H3 + H4)/6.0
      X(I) = X1
      Y(I) = Y1
10    CONTINUE
      RETURN
      END
```

形参说明：

A——区间左端点；

B——区间右端点；

YA——y 的初值；

X——一维数组，装各结点 x 的值；

Y——一维数组，装与 x 相应的 y 值。

程序执行结果：

```
 0   [空一行
                空39格
                    ␣ 0      空6格    0.00      空6格    1.000000
                    ␣ 1               0.20                1.183229
 0                  ␣ 2               0.40                1.341667
                    ␣ 3               0.60                1.483281
                    ␣ 4               0.80                1.612514
 0                  ␣ 5               1.00                1.732141
```

三、误差的估算

前面已经指出，龙格—库塔法的截断误差为 $0(h^5)$，即与间隔的五次方 h^5 成比例。如果间隔 h 减小，其准确度可以迅速提高。但是间隔也不是愈小愈好，因为间隔过小，则计算点就增多，不仅增加计算的工作量，而且还会使舍入误差积累加大，反使准确度降低。

在实际计算中，通常采用下面的方法来检查计算结果的准确程度，并自动地选择适当的步长。

设从 x_n 出发，以 h 为步长，经过一步计算得 $y(x_{n+1})$ 的近似值 $y_{n+1}^{(h)}$，其截断误差为 ch^6，即

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(h)} \approx ch^5 \tag{3-70}$$

其中，系数 c 当 h 不大时可近似看作常数。

然后，将步长折半，即取 $\frac{h}{2}$ 为步长，从 x_n 出发，经两步计算，求得 $y(x_{n+1})$ 的近似值为 $y_{n+1}^{(h/2)}$。每一步计算的截断误差为 $c\left(\frac{h}{2}\right)^5$，于是有

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(h/2)} \approx 2c\left(\frac{h}{2}\right)^5 \tag{3-71}$$

由 (3-71) 式与 (3-70) 式比较可得

$$\frac{y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(h/2)}}{y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(h)}} \approx \frac{1}{16}$$

上式经整理得

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(h/2)} \approx \frac{1}{15}[y_{n+1}^{(h/2)} - y_{n+1}^{(h)}] \tag{3-72}$$

这表明：以 $y_{n+1}^{(h/2)}$ 作为 $y(x_{n+1})$ 的近似值，其误差可用先后两次计算结果的差来表示。由此可知，只需考察

$$|y_{n+1}^{(h/2)} - y_{n+1}^{(h)}| < e \tag{3-73}$$

是否成立。如果成立，则可将 $y_{n+1}^{(h/2)}$ 作为 $y(x_{n+1})$ 的近似值；如果不成立，则将步长再折半进行计算，直到不等式 (3-73) 成立为止，并取最后的 $y_{n+1}^{(h/2)}$ 作为计算结果。式中的 e 为允许误差值。这就是在计算中自动选择步长的方法，也称为变步长的龙格—库塔法。

四、解弹道方程组

解弹道方程组，是在 (3-60) 和 (3-61) 式的基础上，用常微分方程组

$$\left.\begin{aligned} y_i' &= f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n) \\ y_i(x_0) &= y_{i0} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{aligned}\right\} \tag{3-74}$$

中 n 个微分方程联立并考虑到 n 个初始条件来计算的。

下面我们仍采用龙格——库塔法来解 (3-74) 式这样的一阶常微分方程组的初值问题。

由 x_m，$y_{im}(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 以及步长 h，求 $y_{im+1}(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的龙格——库塔公式如下：

$$y_{im+1} = y_{im} + \frac{h}{6}(K_{i1} + 2K_{i2} + 2K_{i3} + K_{i4}) \tag{3-75}$$

其中：
$$K_{i1} = f_i(x_m,\ y_{1m},\ \cdots,\ y_{nm});$$

$$K_{i2} = f_i\left(x_m + \frac{h}{2},\ y_{1m} + \frac{h}{2}K_{11},\ \cdots,\ y_{nm} + \frac{h}{2}K_{n1}\right);$$

$$K_{i3} = f_i\left(x_m + \frac{h}{2},\ y_{1m} + \frac{h}{2}K_{12},\ \cdots,\ y_{nm} + \frac{h}{2}K_{n2}\right);$$

$$K_{i4} = f_i(x_m + h,\ y_{1m} + hK_{13},\ \cdots,\ y_{nm} + hK_{n3})$$

$$(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

现在我们以空气中的炸弹弹道的质心运动方程组为例，来说明用龙格—库塔法手算弹道诸元的步骤。

采取以高度 y 为自变量的弹丸质心运动方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{^*du}{dy} = -CH(y)G(v)\frac{1}{p} && ①\\
&\frac{^*dp}{dy} = -\frac{g}{u^2p} && ②\\
&\frac{^*dx}{dy} = \frac{1}{p} && ③\\
&\frac{dt}{dy} = \frac{1}{up} && ④\\
&v = u\sqrt{1+p^2} && ⑤
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}76)$$

积分的初始条件为：当 $y=H$ 时，$u=u_0=v_0\cos\lambda$，$p=p_0=\operatorname{tg}\lambda$，$x=0$，$t=0$。

为了计算方便，选取符号

$$K=-CH(y)G(v)\frac{1}{p}\cdot\Delta y,\quad l=-\frac{g}{u^2p}\cdot\Delta y$$

Δy 为计算时所取的自变量 y 的间隔。

求解时，首先解方程组中前两个联解方程（步骤详见表 3-12），计算到 $y=0$ 为止。

表 3-12　用龙格——库塔法计算炸弹弹道诸元

	$\frac{du}{dy}=-CH(y)G(v)\cdot\frac{1}{p}$	$\frac{dp}{dy}=-\frac{g}{u^2p}$
	$v_{01}=u_0\sqrt{1+p_0^2}$	
	$K_{01}=-CH(H)G(v_{01})\frac{1}{p_0}\cdot\Delta y$	$l_{01}=-\frac{g}{n_0^2p_0}\cdot\Delta y$
计	$v_{02}=\left(u_0+\frac{K_{01}}{2}\right)\sqrt{1+\left(p_0+\frac{l_{01}}{2}\right)^2}$	
算	$K_{02}=-CH(H)G(v_{02})\frac{1}{p_0+\frac{l_{01}}{2}}\cdot\Delta y$	$l_{02}=-\frac{g}{\left(u_0+\frac{K_{01}}{2}\right)^2\left(p_0+\frac{l_{01}}{2}\right)}\cdot\Delta y$
u_1	$v_{03}=\left(u_0+\frac{K_{02}}{2}\right)\sqrt{1+\left(p_0+\frac{l_{02}}{2}\right)^2}$	
和	$K_{03}=-CH(H)G(v_{03})\frac{1}{p_0+\frac{l_{02}}{2}}\Delta y$	$l_{03}=-\frac{g}{\left(u_0+\frac{K_{02}}{2}\right)^2\left(p_0+\frac{l_{02}}{2}\right)}\cdot\Delta y$
p_1	$v_{04}=(u_0+K_{03})\sqrt{1+(p_0+l_{03})^2}$	
	$K_{04}=-CH(H)G(v_{04})\frac{1}{p_0+l_{03}}\cdot\Delta y$	$l_{04}=-\frac{1}{(u_0+K_{03})^2(p_0+l_{03})}\cdot\Delta y$
	$\Delta u_0=\frac{1}{6}(K_{01}+2K_{02}+2K_{03}+K_{04})$ $u_1=u_0+\Delta u_0$	$\Delta p_0=\frac{1}{6}(l_{01}+2l_{02}+2l_{03}+l_{04})$ $p_1=p_0+\Delta p_0$

表 3-12 （续）

	$\frac{du}{dy}=-CH(y)G(v)\cdot\frac{1}{p}$	$\frac{dp}{dy}=-\frac{g}{u^2p}$
	$v_{11}=u_1\sqrt{1+p_1^2}$	
计	$K_{11}=-CH(H-\triangle y)G(v_{11})\frac{1}{p_1}\cdot\triangle y$	$l_{11}=-\frac{g}{u_1^2\cdot p_1}\cdot\triangle y$
	$v_{12}=\left(u_1+\frac{K_{11}}{2}\right)\sqrt{1+\left(p_1+\frac{l_{11}}{2}\right)^2}$	
算	$K_{12}=-CH(H-\triangle y)G(v_{12})\frac{1}{p_1+\frac{K_{11}}{2}}\triangle y$	$l_{12}=-\frac{g}{\left(u_1+\frac{K_{11}}{2}\right)^2\cdot\left(p_1+\frac{l_{11}}{2}\right)}\cdot\triangle y$
u_2	$v_{13}=\left(u_1+\frac{K_{12}}{2}\right)\sqrt{1+\left(p_1+\frac{l_{12}}{2}\right)^2}$	
	$K_{13}=-CH(H-\triangle y)G(v_{13})\frac{1}{p_1+\frac{K_{12}}{2}}\triangle y$	$l_{13}=-\frac{g}{\left(u_1+\frac{K_{12}}{2}\right)^2\left(p_1+\frac{l_{12}}{2}\right)}\cdot\triangle y$
和	$v_{14}=(u_1+K_{13})\sqrt{1+(p_1+l_{13})^2}$	
p_2	$K_{14}=-CH(H-\triangle y)G(v_{14})\frac{1}{p_1+l_{13}}\triangle y$	$l_{14}=-\frac{g}{(u_1+K_{13})^2(p_1+l_{13})}\triangle y$
	$\triangle u_1=\frac{1}{6}(K_{11}+2K_{12}+2K_{13}+K_{14})$	$\triangle p_1=\frac{1}{6}(l_{11}+2l_{12}+2l_{13}+l_{14})$
	$u_2=u_1+\triangle u_1$	$p_2=p_1+\triangle p_1$
计算	⋮	⋮
u_3		
和	⋮	⋮
p_3		

(3-76)式中的第（3）式和第（4）式单独求解，其步骤就是龙格—库塔的计算法，可参阅表 3-10 的顺序，求 x_4 和 t_4（具体列表计算顺序从略）。

最后，详细地讲述一个利用龙格—库塔法，通过 FORTRAN 语言编写程序来计算某航空炸弹的标准落下时间 θ 的例子。

用 y 轴铅直向下的直角坐标系，如图 3-16 所示。在 M 点列出以 t 为自变量的炸弹质心运动的微分方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{pt}&=-CH(H-y)G(V,\ a)u\\ \frac{dp}{dt}&=\frac{g}{u}\\ \frac{dx}{dt}&=u\\ \frac{dy}{dt}&=up\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}77)$$

联系方程： $V = u \cdot \sqrt{1+P^2}$

$\theta = \mathrm{tg}^{-1}P$

其中， $P = \frac{W}{u}$，$g = 9.806$ 米/秒^2

初始条件：$t = 0$，$u = 40$ 米/秒，$W = 0$，$P = 0$，$H = 2000$ 米。

气象条件：$h_{0N} = 760$ 毫米汞高，$\tau_{0N} = 288.4°\mathrm{K}$，$R = 29.27$。对流层温度垂直递减率 $G = 5.862 \times 10^{-3}$ 度/米。

炸弹参数：弹重 $q = 216.5$ 公斤。弹径 $d = 0.299$ 米，弹长 $l = 2.11$ 米。

空气阻力系数：当 $M < 0.7$ 时，$C_{X0} = 0.160$

用龙格—库塔法（步长当 $y \leqslant 100$ 米时，$\triangle t = 0.1$ 秒；当 100 米$\leqslant y \leqslant$200 米时，$\triangle t = 0.2$ 秒；当 $y > 200$ 米时，$\triangle t = 0.5$ 秒）计算该航空炸弹的标准落下时间Θ，同时打印出水平射程A、落角θ_c、瞄准角φ及退曳长$\triangle$的值。

采用公式 (3-75) 解题，用 FORTRAN 语言编写程序如下：

```
      DIMENSION Y(4), F(4), P(4), YW(4)
      EXTERNAL FCT
      DATA T, Y/0.0, 40.0, 0.0, 0.0, 0.0/
      H=0.5
   10 CALL RK(4, T, 0.1, FCT, F, P, TW, YW, Y)
      IF(Y(4)-100.0) 10, 10, 15
   15 IF(Y(4)-200.0) 20, 20, 25
   20 CALL RK(4, T, 0.2, FCT, F, P, TW, YW, Y)
      GO TO 15
   25 CALL RK(4, T, H, FCT, F, P, TW, YW, Y)
      IF((2000.-Y(4))*GT*0.1) GO TO 25
      IF(((2000.-Y(4))*LE*0.1)*AND*((2000.-Y(4))
     &*GE*(0.1)))GO TO 100
      H=H/5.0
      T=TW
      DO 30 I=1, 4
   30 Y(I)=YW(I)
      GO TO 25
  100 V=Y(1)*SQRT(1.0+Y(2)*Y(2))
      FAI=ATAN2(Y(3), 2000.0)*57.3
      DEDA=40.0*T-Y(3)
      SETA=57.3*ATAN(Y(2))
      WRITE (108, 2) Y(3), T, V, FAI, SETA, DEDA
    2 FORMAT (11X, 91('*')/11X, '*', 6(14X, '*')/
     &11X, '*', 1X, 'A=', F10.5, 1X, '*', 1X, 'OSEDA=',
     &F7.4, '*', 2X, 'VC=', F6.2, 3X, '*', 2X, 'FAI=',
```

```
     &F6.2, 2X, '*', 1X, 'SETAC=', F6.2, 1X, '*', 2X,
     &'DEDA=', F5.2, 2X, '*'/11X, '*', 6(14X, '*')/
     &11X, 91('*')//)
       STOP
       END
       SUBROUTINE RK(N, T, H, FCT, F, P, TW, YW, Y)
       DIMENSION F(N), P(N), YW(N), Y(N), U(5)
       U(1)=0.5*H
       U(2)=0.5*H
       U(3)=H
       U(4)=H
       U(5)=0.5*H
       TW=T
       DO 1 I=1, N
       P(I)=Y(I)
    1  YW(I)=Y(I)
       DO 2 J=1, 4
       CALL FCT(T, P, F)
       T=TW+U(J)
       DO 2 I=1, N
       P(I)=U(J)*F(I)+YW(I)
    2  Y(I)=U(J+1)*F(I)/3.0+Y(I)
       RETURN
       END
```

因为 (3-77) 式中的第一个方程的右端项

$$-CH(H-y)G(V,\ a)u=-\frac{id^2}{q}\cdot\frac{13.6h}{R\tau}\cdot\frac{\pi}{8}\cdot C_{\bar{x}_0}\cdot u^2\sqrt{1+P^2}$$

若以该炸弹自身为标准弹时，则 $i=1$，$C_{x0}=C_{\bar{x}_0}$。

将已知条件代入上式并整理得

$$-CH(H-y)G(V,\ a)u=-1.206\times10^{-5}\cdot u^2\cdot\sqrt{1+P^2}\cdot\frac{h}{\tau}$$

故有微分方程组右函数的子程序为：

```
       SUBROUTINE FCT(T, Y, F)
       DIMENSION Y(4 , F(4))
       G=5.862 E-3
       PH=760.0*(1.0-G*(2000.0-Y(4))/288.4)**
      &(1.0/0.17158)
       TAO=288.4-G*(2000.0-Y(4))
       F(1)=-1.206E-5*PH*Y(1)**2*SQRT(1.0+Y(2)**2)
      &/TAO
```

```
      F(2)=9.806/Y(1)
      F(3)=Y(1)
      F(4)=Y(2)*Y(1)
      RETURN
      END
```

该例所编程序的输出打印结果如下：

```
**********************************************************
*          *          *          *          *          *
*  A=797.98486 *  OSEDA=20.4048 *   VC=195.72  *  FAI=21.75  *
*          *          *          *          *          *
**********************************************************
  **********************
  *          *         *
① SEAC=78.95 *  DEDA=18.21 *
  *          *         *
  **********************
```

程序中的参量对照如下表。

公式参数	u	P	x	y	t	Δt	du/dt	dp/dt	dx/dt	dy/dt	h	G	τ
程序参量	Y(1)	Y(2)	Y(3)	Y(4)	T	H	F(1)	F(2)	F(3)	F(4)	PH	G	TAO

公式数参	A	θ	V_c	φ	θ_c	Δ	θ
程序参量	A	OSEDA	VC	FAI	SETAC	DEDA	SETA

形参的意义：

N—方程的个数；

T—开始存放自变量 *t* 的初值，返回时为初值加步长 Δt（即程序参量 *H*）；

H—积分步长 Δt；

FCF—计算微分方程组右函数的子程序名；

F—工作单元（一维数组），也是计算 K_{i1}、K_{i2}、K_{i3}、K_{i4} 的工作单元；

P—工作单元（一维数组）；

TW—工作单元；

YW—工作单元（一维数组）；

Y—开始存放因变量各初值，返回时为积分结果；

§5 阿当姆斯法

我们已经讲过微分方程的初值问题

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \tag{3-79}$$

与积分方程

① 在计算机打印时，此表应打印成一行。这里因版面关系，拆成二行。

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,\ y(x))\,dx \tag{3-79}$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$$

等价。本节所介绍的方法，其基本思想是用一个插值多项式 $P(x)$ 来代替 (3-79) 式中的被积函数 $f(x,y)$，然后用

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P(x)\,dx \tag{3-80}$$

代替(3-79)式。这种方法实际上要分两步来做：

(1)求出开头几个点 x_k 上的近似值 y_k，即计算“开头值”；

(2)利用 (3-80) 式逐步求后面点 x_k 上的值 y_k。

选取不同的插值点作插值多项式，就会得到不同的数值解法。我们介绍其中的一种，叫阿当姆斯 (Adams) 方法。

一、阿当姆斯内插公式

选取四个点作为插值点来说明，如选定点 x_{n-2}，x_{n-1}，x_n，x_{n+1}，这时插值多项式为

$$\begin{aligned}
P(x) = {} & \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})}{(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_{n-1})(x_{n+1}-x_{n-2})} \cdot f[x_{n+1},\ y(x_{n+1})] \\
& + \frac{(x-x_{n+1})(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})}{(x_n-x_{n+1})(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n-2})} \cdot f[x_n,\ x(x_n)] \\
& + \frac{(x-x_{n+1})(x-x_n)(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_{n+1})(x_{n-1}-x_n)(x_{n-1}-x_{n-2})} \cdot f[x_{n-1},\ y(x_{n-1})] \\
& + \frac{(x-x_{n+1})(x-x_n)(x-x_{n-1})}{(x_{n-2}-x_{n+1})(x_{n-2}-x_n)(x_{n-2}-x_{n-1})} \cdot f[x_{n-2},\ y(x_{n-2})]
\end{aligned}$$

将 $P(x)$ 代入式 (3-80)，并令 $x = x_n + th$，作变量代换，同时注意到 $x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} = h$，则得

$$\begin{aligned}
y_{n+1} = {} & y_n + \int_0^1 \frac{ht \cdot h(t+1) \cdot h(t+2)}{h \cdot 2h \cdot 3h} \cdot f_{n+1} \cdot h\,dt \\
& + \int_0^1 \frac{h(t-1) \cdot h(t+1) \cdot h(t+2)}{(-h) \cdot h \cdot 2h} \cdot f_n \cdot h\,dt \\
& + \int_0^1 \frac{h(t-1) \cdot ht \cdot h(t+2)}{(-2h) \cdot (-h) \cdot h} \cdot f_{n-1} \cdot h\,dt \\
& + \int_0^1 \frac{h(t-1) \cdot ht \cdot h(t+1)}{(-3h) \cdot (-2h)(-h)} \cdot f_{n-2} \cdot h\,dt \\
= {} & y_n + \frac{1}{6}h f_{n+1}\int_0^1 t(t+1)(t+2)\,dt - \frac{1}{2}h f_n \int_0^1 (t-1)(t+1)(t+2)\,dt \\
& + \frac{1}{2}h f_{n-1}\int_0^1 (t-1)\,t(t+2)\,dt - \frac{1}{6}h f_{n-2}\int_0^1 (t-1)\,t(t+1)\,dt \\
= {} & y_n + \frac{1}{24}h[9f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}]
\end{aligned} \tag{3-81}$$

这个公式，称为阿当姆斯内插公式。这是一个含有 y_{n+1} 的方程式，在此(3-81)式中 $f_{n+1} =$

$f[x_{n+1}, y(x_{n+1})]$、$f_n=f[x_n, y(x_n)]$、$f_{n-1}=f[x_{n-1}, y(x_{n-1})]$、$f_{n-2}=f[x_{n-2}, y(_{n-2})]$。

在假定 $y_n=y(x_n)$，$y_{n-1}=y(x_{n-1})$，$y_{n-2}=y(x_{n-2})$ 的条件下，来比较 y_{n-1} 与 $y(x_{n+1})$ 的台劳展开式，可以推出公式(3-81)的截断误差为

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=-\frac{19}{720}h^5y_n^{(5)}+\cdots=0(h^5) \tag{3-82}$$

二、阿当姆斯外插公式

内插公式(3-81)之所以是两边都含有 y_{n+1} 的隐式方程，这是因为选取了 x_{n+1} 作为插值点的缘故。如果插值点选为 x_{n-3}，x_{n+2}，x_{n+1}，x_n，这时插值多项式为

$$\begin{aligned}P(x)=&\frac{(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})(x-x_{n-3})}{(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-3})}\cdot f[x_n, y(x_n)]\\&+\frac{(x-x_n)(x-x_{n-2})(x-x_{n-3})}{(x_{n-1}-x_n)(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_{n-3})}\cdot f[x_{n-1}, y(x_{n-1})]\\&+\frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-3})}{(x_{n-2}-x_n)(x_{n-2}-x_{n-1})(x_{n-2}-x_{n-3})}\cdot f[x_{n-2}, y[x_{n-3}]]\\&+\frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})}{(x_{n-3}-x_n)(x_{n-3}-x_{n-1})(x_{n-3}-x_{n-2})}\cdot f[x_{n-3}, y(x_{n-3})]\end{aligned}$$

将上式 $P(x)$ 代入(3-80)式，令 $x=x_n+ht$，作变量代换，并注意到 $x_n-x_{n-1}=x_{n-1}-x_{n-2}=x_{n-2}-x_{n-3}=h$，则得

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{24}h[55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3}] \tag{3-83}$$

这就是阿当姆斯外插公式。在 $y_n=y(x_n)$、$y_{n-1}=y(x_{n-1})$、$y_{n-2}=y(x_{n-2})$、$y_{n-3}=y(x_{n-3})$ 的假设条件下，利用台劳展开式可以推出公式(3-83)的截断误差为

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=\frac{251}{720}h^5y_n^{(5)}+\cdots=0(h^5) \tag{3-84}$$

在计算中常常把内插公式(3-81)和外插公式(3-83)联用。就是说用外插法提供初值，再用内插法公式进行迭代，有时还可规定只迭代一次就得结果。这样就成了一种预报校正系统，其迭代公式如下：

$$\left.\begin{aligned}y_{n+1}^{(0)}=&y_n+\frac{h}{24}[55f(x_n, y_n)-59(x_{n-1}, y_{n-1})+37f(x_{n-2}, y_{n-2})\\&-9f(x_{n-3}, y_{n-3})]\\y_{n+1}=&y_n+\frac{h}{24}[9f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})+19f(x_n, y_n)-5f(x_{n-1}, y_{n-1})\\&+f(_{n-2}, y_{n-2})]\end{aligned}\right\}\tag{3-85}$$

三、估计误差的一种方法

利用阿当姆斯法的外插公式与内插公式分别得到的 $y_{n+1}^{(0)}$ 与 y_{n+1}，可以大体估计误差 $y(x_{n+1})-y_{n+1}$。

前面已经指出，内插公式的截断误差和外插公式的截断误差可分别用(3-82)式和(3-84)式进行估算，即

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=-\frac{19}{720}h^5y_n^{(5)}+\cdots \tag{3-86}$$

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(0)}=\frac{251}{720}h^5y_n^{(5)}+\cdots \tag{3-87}$$

两式相减并略去含有 h^6 以上的后面各项，可得

$$y_{n+1}-y_{n+1}^{(0)}\approx\frac{3}{8}h^5y_n^{(5)} \tag{3-88}$$

将(3-88)式代入(3-86)式得

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}\approx-\frac{19}{270}(y_{n+1}-y_{n+1}^{(0)}) \tag{3-89}$$

上面的推导说明是不严密的，但这里得出的结论在计算中是可以应用的，即可根据(3-89)式来看计算结果是否达到了所要求的精确度。若不满足，就应缩小步长。

四、计算举例

已给微分方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=y-\frac{2x}{y}\\&y(0)=1\end{aligned}\right\}$$

在区间 [0，1.5] 上求解（取步长 $h=0.1$）。

解： 用阿当姆斯方法求解，必须先用其它方法求出开头几点的值。现用龙格—库塔法求出开头三步的值，然后分别用外插公式(3-83)以及予报校正公式(3-85)来进行计算，其结果列于表 3-13 。

表 3-13　用阿当姆斯法解微分方程的初值问题

x_n	y_n		
	龙格-库塔法	外 插 法	预报校正法
0	1		
0.1	1.095446		
0.2	1.183217		
0.3	1.264912		
0.4		1.341551	1.341641
0.5		1.414045	1.414213
0.6		1.483017	1.483239
0.7		1.548917	1.549192
0.8		1.612114	1.612450
0.9		1.672914	1.673318
1.0		1.731566	1.732048
1.1		1.788277	1.788851
1.2		1.843222	1.843905
1.3		1.896549	1.897362
1.4		1.948385	1.949353
1.5		1.998839	1.999993

第三章 习 题

3-1 已知西亚切阻力定律 $G(V_\tau)$ 的部分数据

V_τ	100	200	300	400	500	600	700
$G(V_\tau)$	0.0121	0.0246	0.0515	0.1288	0.1742	0.2053	0.2280

应用线性插值和二次插值公式计算 $G(235)$ 和 $G(485)$ 的近似值。

3-2 某一航弹模型进行吹风试验，对于攻角为零时，测得不同 M 数所对应的阻力系数 C_{x_0} 值，如下表

M	0.5	0.7	0.8	1.0	1.1
C_{x_0}	0.0687	0.0548	0.0711	0.2014	0.2306

试用线性插值和二次插值分别求出 $M=0.86$ 时的 C_{x_0} 值。

3-3 设有某试验数据

x	1.36	1.49	1.73	1.81	1.95	2.16	2.28	2.48
y	14.094	15.069	16.844	17.378	18.435	19.949	20.963	22.495

用最小二乘法曲线拟合以上数据。

3-4 设有 43 年阻力定律 $F(V_\tau)$ 函数表如下：

n	V_τ	$F(V_\tau)$	$\Delta F(V_\tau)$	$\Delta^2 F(V_\tau)$	$\Delta^3 F(V_\tau)$
0	400	29.12	7.14	−0.20	0.33
1	450	36.26	6.94	0.13	
2	500	43.20	7.07		
3	550	50.27			

求 $V_\tau=430$ 时的 $F(V_\tau)$ 值。

3-5 用龙格—库塔法求

$y'=x^2+y^2$，$y(0)=1$ 的解，在 $x=1.1$，1.2 的近似值（结果保留小数点后面三位）。

3-6 用阿当姆斯法求

$$y'=x^2-y^2,\quad y(-1)=0$$

在 $-1\leqslant x\leqslant 0$，$h=0.1$ 的数值解，要求有四位有效数字。

第四章　航空外弹道的近似求解

用数值积分法使用现代化的计算工具——电子计算机，求解弹丸质心运动微分方程组，可以相当精确地解得弹道诸元，为设计火控系统提供必要的弹道参数，这是目前常用的解算方法。但对于机载火控系统来说，在现代化空战条件下，用上述方法获得弹道参数，仍嫌不够迅速。现代空战飞机多是近音速或超音速飞行，一秒钟内即可使敌我距离增大数百米，延误时间就会丢失战机。这已不是分秒必争而是毫、微秒必争的问题了。因此，要求机载火控计算机要迅即解算出弹道参数来，以便火控系统紧紧地抓住战机，瞄准目标。所以最好的方法，是把弹丸质心运动微分方程式简化为既简单而又有一定精确度的解析式。用机载火控计算机解这种简化解析式，就能快速地获得比较精确的弹道参数来。

§1　斜角坐标系射击弹道的近似求解

一、引言

空战时，射击弹道一般都在比较平直的部份命中目标，它的特点是：弹丸初速度V_0较大；目标距离D不很大；弹道抬高角a很小；敌我飞机位置高低差不太大，所以弹道比较平直。这就是近似解法的主要依据。

近似求解的思路是：

1）　通过一定的精度要求提出某些简化或代替；

2）　在这些简化条件下破坏了质心运动方程组的联立性；

3）　从而可对每个方程式单独求解，在求解过程中引入某些弹道函数，这些弹道函数可以事先单独计算，列成专门的表格备查；

4）　最后结果是把弹道诸元用一个简单明瞭的解析式子表示出来。

下面对斜角坐标系弹丸质心运动方程组近似求解。

二、方程组的简化及自变量的选取

从第二章弹丸斜角坐标系质心运动方程组中，得到以坐标量ξ为自变量的方程组，其结构形式比较简单，因此选用该方程组，对它简化更为方便。该方程组为

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{d\xi} &= -CH_\tau(y)G(V_\tau) = -CH(y)G(V,a), \\ \frac{dP}{d\xi} &= g/U^2, \\ \frac{dt}{d\xi} &= 1/U, \end{aligned}\right\} \tag{4-1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\eta}{d\xi} = p\,,\\
&y = H + \xi\cdot\sin(\alpha+\varepsilon) - \eta,\\
&\overline{V} = U\overline{\xi}^0 + W\overline{\eta}^0 = U\overline{\xi}^0 + PU\overline{\eta}^0
\end{aligned}\right\}$$

上式参阅(2-13)式

初始条件：$\xi=0$，$t=0$，$\eta=0$，$W=0$，$U=V_{01}$，$P=W/U=0$ 。

由于目标距离D不太大，通常不超过 2000 米；敌我位置高低差也不太大（例如：目标高低角$\varepsilon\approx30°$，$D\approx2000$ 米时，高低差为 1000 米时是最大情况，这时比重函数差值为$\triangle H(y)=0.093$）；弹丸初速度较大；α角较小，弹道比较平直；在标准气象条件下。因此，可用下列参量取代方程组(4-1)中的有关参量：

1. 以射击点高度H代替全弹道高度y，即空气比重函数$H(y)\approx H(H)$ 。

2. 以地面音速标准值a_{0N}代替全弹道高度y上的音速值a，即阻力函数$G(V/a)\approx G(V/a_{0N})=G(V)$。因此有

$$H(y)G(V/a)\approx H(H)G(V)\ 。$$

3. 以U代替V，由图 4-1(*b*)知，在速度三角形中有：

$$\frac{U}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{V}{\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\varepsilon)\right]}$$

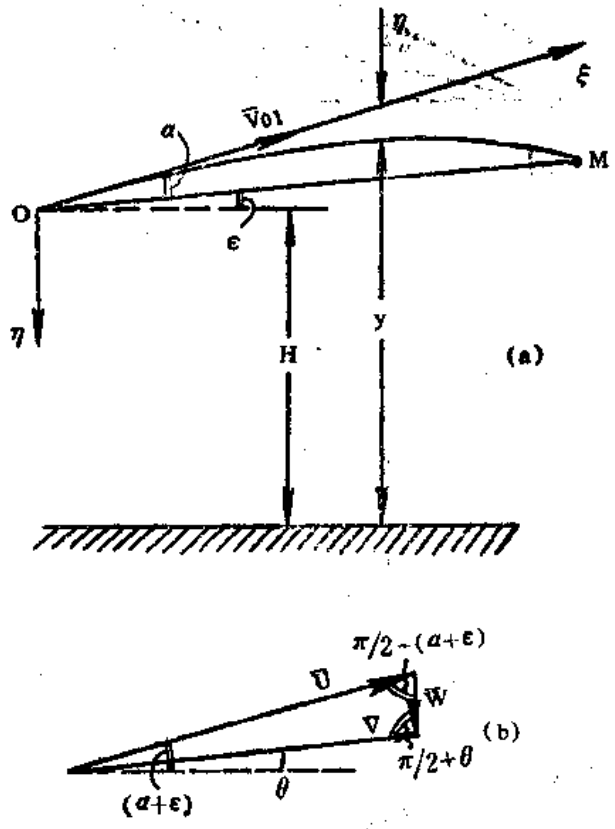


图 4-1 斜角坐标系弹道简化代替图

(*a*) 空中射击时斜角坐标系图 (*b*) 简化代替图

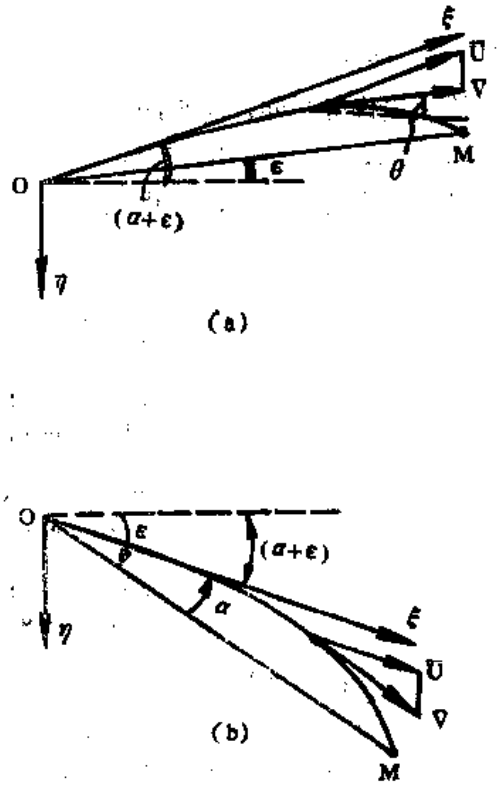


图 4-2 补偿作用图

(*a*) 向上射击时 (*b*) 向下射击时

即：　　$U = V \cdot \cos\theta / \cos(\alpha + \varepsilon)$

由于 α 很小，弹道切线倾角 θ 与初射角 $\theta_{01} = \alpha + \varepsilon$ 相差不大，故可认为 $\cos\theta \approx \cos(\alpha + \varepsilon)$，即 $U \approx V$。因而 $G(V) \approx G(U)$。

考虑到向上射击时，目标高低角 ε 为正，如图 4-2(a)，$\alpha + \varepsilon > 0$，这时 $U > V$，故 $G(U) > G(V)$。又知 $y > H$，故 $H(y) < H(H)$。

$$\therefore \quad H(y) \cdot G(V) < H(H) \cdot G(U)$$

为了补偿代替后带来的误差，我们在 $H(H) \cdot G(U)$ 中乘入一个 $\frac{\cos(\alpha+\varepsilon)}{\cos\varepsilon} < 1$ 的量，起到减少误差的作用。

当向下射击时，ε 为负值，这时 $|\varepsilon| > |\alpha + \varepsilon|$，如图 4-2(b)，$U < V$，$y < H$。

$$\therefore \quad H(y) \cdot G(V) > H(H) \cdot G(U)。$$

同理，为了减少误差，我们在 $H(H) \cdot G(U)$ 中乘入 $\frac{\cos(\alpha+\varepsilon)}{\cos\varepsilon} > 1$ 的量，仍起补偿作用。

则有　　$H(y) \cdot G(V) \doteq H(H) \cdot G(U) \frac{\cos(\alpha+\varepsilon)}{\cos\varepsilon}$。

4. 以目标距离 D 代替坐标距离 ξ，在空中射击时，坐标距离 ξ 无法测得，而目标距离 D 却可利用光学或雷达或红外等测距仪器测得。用 D 代 ξ 可使火控系统解弹道参数更加方便。由图 4-3 知

$$D = \xi \frac{\cos(\alpha+\varepsilon)}{\cos\varepsilon}。$$

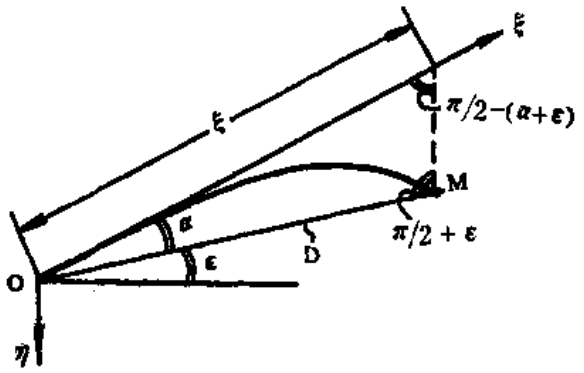


图 4-3　以D代替ξ图

从上述代替可知，本方法只适用于 $D < 2000$ 米，$\varepsilon < 30°$ 的情况。

通过上述代替之后，方程组 (4-1) 变为如下形式

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{dD} &= -C \cdot H(H) \cdot G(U), \quad ① \\ \frac{dP}{dD} &= \frac{\cos\varepsilon}{\cos(\alpha+\varepsilon)} \cdot \frac{g}{U^2}, \quad ② \\ \frac{d\eta}{dD} &= \frac{\cos\varepsilon}{\cos(\alpha+\varepsilon)} \cdot P, \quad ③ \\ \frac{dt}{dD} &= \frac{\cos\varepsilon}{\cos(\alpha+\varepsilon)} \cdot \frac{1}{U} \quad ④ \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}2)$$

初始条件：$D = 0$，$U = V_{01}$，$P = 0$，$\eta = 0$，$t = 0$。

式中：$H(H)$—为对应于射击点处的比重函数，当射击点确定以后，$H(H)$可作为常数对待，与 C 合并，写为 C_H。D—为射击距离，当对应于不同的射击距离时，D 被作为自变量。由于 α 角很小，故 $\frac{\cos\varepsilon}{\cos(\alpha+\varepsilon)} \doteq 1$，所以近似计算时可以将其略去。另一方面 α 值尚未

求出，若要精确一些计算，则待解出α值后再分别在P，η，t值中乘入$\frac{\cos\varepsilon}{\cos(\alpha+\varepsilon)}$项，予以修正。

上列方程组又简化为：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dU}{dC_HD}=-G(U) \quad ①\\
&\frac{dP}{dC_HD}=\frac{g}{C_HU^2} \quad ②\\
&\frac{d\eta}{dC_HD}=\frac{P}{C_H} \quad ③\\
&\frac{dt}{dC_HD}=\frac{1}{C_HU}\ 。 \quad ④
\end{aligned}\right\} \tag{4-3}$$

初始条件：$C_HD=0$，$U=V_{01}$，$P=0$，$\eta=0$，$t=0$ 。

这样做就破坏了上述微分方程组（4-1）的联立性，对各式可由上至下单独求解。解后面的方程用到前面方程的结果。

三、方程组的近似求解及弹道诸元的计算

1．对（4—3）①式求解

$$\frac{dU}{dC_HD}=-G(U)，\quad 变为\ dC_HD=-\frac{dU}{G(U)}\ 。$$

在初始条件$C_HD=0$时，$U=V_{01}$积分至C_HD、U，

得 $C_HD=-\int_{V_{01}}^{U}\frac{dU}{G(U)}$ 。

把等式右端变为 $-\left[\int_{V_{01}}^{2000}\frac{dU}{G(U)}+\int_{2000}^{U}\frac{dU}{G(U)}\right]=\int_{U}^{2000}\frac{dU}{G(U)}-\int_{V_{01}}^{2000}\frac{dU}{G(U)}$ 。

上式中 $G(U)=4.74\times10^{-4}\cdot C_{\bar{x}0}(U/a_{0N})\cdot U$，

$C_{\bar{x}0}$为西亚切定律的标准阻力系数，$G(U)$和$C_{\bar{x}0}(M)$都已编成表格函数，用数值积分法可以求解，积分上限2000是人为设置的中间量。

设解得：$\int_{U}^{2000}\frac{dU}{G(U)}=D(U)$，$D(U)$是自变量$U$的函数，称为西亚切主函数。

同理，$\int_{V_{01}}^{2000}\frac{dU}{G(U)}=D(V_{01})$则是以$V_{01}$为自变量的函数。

故有 $C_HD=D(U)-D(V_{01})$，

或 $D(U)=C_HD-D(V_{01})$ 。 (4-4)

$D(U)$函数与$D(V_{01})$函数具有相同的意义，经计算后列成表格备查，在实验方法测弹丸初速时有用，后面还要讨论。

所以(4-4)式又可改写为$U=f(C_HD,V_{01})$，知道C_HD及V_{01}值即可求得弹丸速度U。

令 $$\frac{U}{V_{01}}=\frac{f(C_HD,V_{01})}{V_{01}}=g_u(C_HD,V_{01})。 \tag{4-5}$$

则 $$U=V_{01}\cdot g_u(C_HD,V_{01})\ 。 \tag{4-6}$$

在真空中 $U \equiv V_{01}$，而在空气中 $U < V_{01}$，故 $g_u \leqslant 1$，g_u 是空气弹道对真空弹道的修正系数，称为弹道函数，经计算后列成表格备查。（见空中射击弹道函数表）。

2. 对（4-3）②式求解

$\frac{dP}{dC_HD} = \frac{g}{C_HU^2}$，将(4-6)式值代入，在初始条件 $C_HD = 0$ 时，$P = 0$ 积分上式，

$$\int_0^P dP = \int_0^{C_HD} \frac{g}{C_H} \frac{dC_HD}{V_{01}^2 \cdot g_u^2(C_HD, V_{01})},$$

得 $$P = \frac{g}{C_HV_{01}^2}\int_0^{C_HD} \frac{dC_HD}{g_u^2} \text{。}$$

∵ 真空时 $g_u = 1$

∴ $$P_{真空} = \frac{gD}{V_{01}^2},$$

令 $$\frac{1}{C_HD}\int_0^{C_HD} \frac{dC_HD}{g_u^2} = g_P(C_HD, V_{01}), \tag{4-7}$$

∴ $$P = \frac{gD}{V_{01}^2} \cdot g_P(C_HD, V_{01}) \text{。} \tag{4-8}$$

由于 P 是 η 轴与 ξ 轴上速度分量之比，$\left(P = \frac{W}{U}\right)$，真空时 $g_u = 1$，$W = gt$，$t = \frac{D}{V_{01}}$，

故 $g_{P真空} = 1$，而空气中 U 递减，故 $g_P \geqslant 1$。

$g_P(C_HD, V_{01})$ 函数也是空气弹道对真空弹道的修正系数，经计算后也列成表格备查。

3.（4-3）③式求解

$\frac{d\eta}{dC_HD} = \frac{P}{C_H}$，把(4-8)式 P 值代入，并在初始条件 $C_HD = 0$ 时，$\eta = 0$ 积分上式，得

$$\int_0^\eta d\eta = \int_0^{C_HD} \frac{gD}{C_H \cdot V_{01}^2} g_P \cdot dC_HD,$$

$$\eta = \frac{g}{C_H^2 \cdot V_{01}^2}\int_0^{C_HD} C_HD \cdot g_P \cdot dC_HD \text{。}$$

在真空时 $g_P = 1$，$\eta = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}\frac{D^2}{V_{01}^2}$，$\left(\frac{D}{V_{01}} = t\right)$。

故 $$\eta_{真空} = \frac{g}{C_H^2V_{01}^2} \cdot \frac{(C_HD)^2}{2} = \frac{gD^2}{2V_{01}^2} \text{。}$$

令 $$\frac{2}{(C_HD)^2}\int_0^{C_HD} C_HD \cdot g_P \cdot dC_HD = g_\eta(C_HD, V_{01}), \tag{4-9}$$

故 $$\eta = \frac{gD^2}{2V_{01}^2} g_\eta(C_HD, V_{01}) \text{。} \tag{4-10}$$

由(4-9)式可看出，由于 $g_P \geqslant 1$，故 $g_\eta \geqslant 1$，$g_{\eta真空} = 1$。g_η 函数也是对真空弹道的修正系数，经计算后也列成表格备查。

4. 对（4-3）④式求解

$\frac{dt}{dC_HD} = \frac{1}{C_H \cdot U}$，将 U 值代入，并在 $C_HD = 0$ 时，$t = 0$ 的初始条件下积分上式，得

$$\int_0^t dt = \int_0^{C_H D} \frac{dC_H D}{C_H \cdot V_{01} \cdot g_u} \text{。}$$

$$t = \frac{1}{C_H \cdot V_{01}} \int_0^{C_H D} \frac{dC_H D}{g_u},$$

在真空时 $g_u = 1$，故 $t_{真空} = \frac{C_H D}{C_H V_{01}} \approx \frac{D}{V_{01}}$ 。

令
$$\frac{1}{C_H D} \int_0^{C_H D} \frac{dC_H D}{g_u} = g_t(C_H D, V_{01}), \tag{4-11}$$

故
$$t = \frac{D}{V_{01}} \cdot g_t(C_H D, V_{01}) \text{。} \tag{4-12}$$

由(4-11)式可看出 $g_{t真空} = 1$。而 $g_u \leqslant 1$，故 $g_t \geqslant 1$。g_t 函数也是对真空弹道的修正系数，经计算后也列表备查。

5. 利用上述积分结果和几何关系，可以分别求得弹道抬高角 α 和命中目标时的落角 ω 与 $C_H D$，V_{01} 的关系式。见图 4-4 。

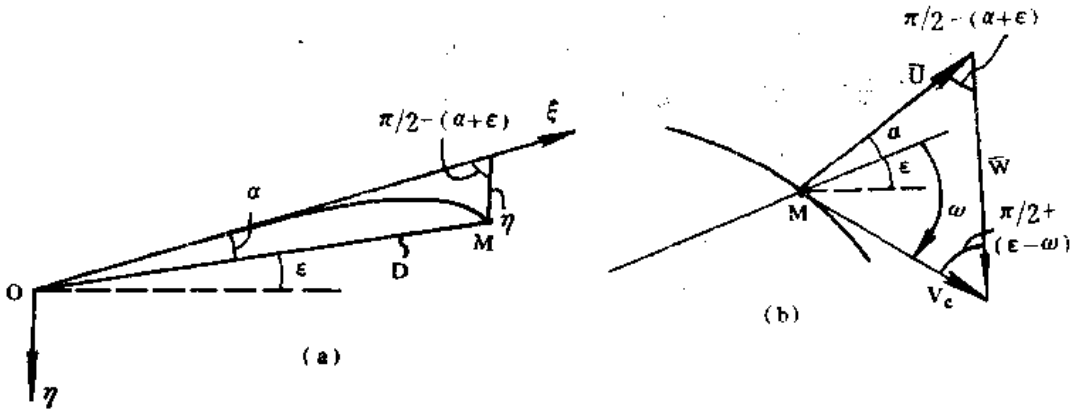


图 4-4 抬高角 α 与落角 ω 图

(a) 抬高角 α 图　　(b) 落角 ω 图

由图可知：
$$\frac{\eta}{\sin\alpha} = \frac{D}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\varepsilon)\right]} \text{即：} \frac{\eta}{\sin\alpha} = \frac{D}{\cos(\alpha+\varepsilon)} \text{。}$$

化简上式
$$\frac{\eta}{D} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\varepsilon - \sin\alpha \cdot \sin\varepsilon} \text{。}$$

即 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\eta \cdot \cos\varepsilon}{D + \eta \sin\varepsilon}$。由于 ε 不大且 α 很小，又上式中分母 $\eta \cdot \sin\varepsilon \ll D$，相比之下可以略去不计，且 $\alpha \doteq \operatorname{tg}\alpha$

故
$$\alpha \doteq \frac{\eta}{D}\cos\varepsilon = \frac{gD}{2V_{01}^2} \cdot \cos\varepsilon \cdot g_\eta(C_H D, V_{01}) \text{。} \tag{4-13}$$

落角 ω 是目标线与落速 V_C 间的夹角，由图4-4(b)知：

$$\frac{U}{\sin\left[\frac{\pi}{2}+(\varepsilon-\omega)\right]}=\frac{W}{\sin(\alpha+\omega)}\ 。$$

故有

$$P=\frac{W}{U}=\frac{\sin(\alpha+\omega)}{\cos(\varepsilon-\omega)},$$

展开并化简后得：

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{P\cos\varepsilon-\sin\alpha}{\cos\alpha-P\sin\varepsilon}\ 。$$

在小抬高角时，ω和P都是同等程度的微小量，可进一步简化：由$\cos\alpha\doteq 1$，$\operatorname{tg}\omega\doteq\omega$，$\sin\alpha\doteq\alpha$，$P\cdot\sin\varepsilon\ll 1$ 。

得

$$\omega\approx P\cdot\cos\varepsilon-\alpha\ 。$$

将P及α值代入上式得：

$$\omega=\frac{gD}{2V_{01}^2}\cos\varepsilon\cdot(2g_P-g_\eta)\ 。\qquad(4\text{-}14)$$

令

$$2g_P-g_\eta=g_\omega(C_HD,V_{01}),\qquad(4\text{-}15)$$

则

$$\omega=\frac{gD}{2V_{01}^2}\cos\varepsilon\cdot g_\omega(C_HD,V_{01})$$

g_ω函数也是对真空弹道的修正系数，$g_\omega\geqslant 1$，也计算出后列表备查。

综上所述，斜角坐标系小抬高角射击弹道诸元的计算公式如下：

$$\left.\begin{aligned}
V&\doteq U\approx V_{01}\cdot g_u(C_HD,V_{01}),\\
P&\approx\frac{gD}{V_{01}^2}\cdot g_P(C_HD,V_{01}),\\
\eta&=\frac{gD^2}{2V_{01}^2}\cdot g_\eta(C_HD,V_{01})\\
t&=\frac{D}{V_{01}}\cdot g_t(C_HD,V_{01}),\\
\alpha&\approx\cos\varepsilon\cdot\frac{gD}{2V_{01}^2}\cdot g_\eta(C_HD,V_{01}),\\
\omega&\approx\cos\varepsilon\cdot\frac{gD}{2V_{01}^2}\cdot g_\omega(C_HD,V_{01})\ 。
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}16)$$

其中g_u，g_P，g_η，g_t，g_ω为弹道函数，都制成表格备查。

四、g函数的进一步简化

g函数是表格函数，它有二个自变量C_HD和V_{01}，用它求弹道参数时比解联立微分方程组方便得多，（当然它的精确度必须满足一定的精度要求）。但在空中射击时，用g函数表求解弹道参数仍不够方便。因此我们设法将g函数变化成更容易被火控计算机接受的函数。

观察各g函数表，在C_HD和V_{01}的常用范围内，各g函数随V_{01}的变化幅度较小，而随C_HD的变化幅度较大。因此，把函数作如下处理：

令：

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{g_u}-1\right)\cdot\frac{1}{C_HD}=K_u(C_HD,V_{01}); \quad \text{即：}\ g_u=\frac{1}{C_HD\cdot K_u+1};\\
&(g_P-1)\cdot\frac{1}{C_HD}=K_P(C_HD,V_{01}); \qquad g_P=C_HD\cdot K_P+1;\\
&(g_\eta-1)\cdot\frac{1}{C_HD}=K_\eta(C_HD,V_{01}); \qquad g_\eta=C_HD\cdot K_\eta+1;\\
&(g_t-1)\cdot\frac{1}{C_HD}=K_t(C_HD,V_{01}); \qquad g_t=C_HD\cdot K_t+1;\\
&(g_\omega-1)\cdot\frac{1}{C_HD}=K_\omega(C_HD,V_{01})。 \qquad g_\omega=C_HD\cdot K_\omega+1\ 。
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}17)$$

诸K函数在C_HD及V_{01}常用范内随C_HD的变化幅度明显地缩小。因而在某一C_HD范围内可取K函数的平均值K_{PJ}，在火控计算机使用中，近似将K_{PJ}函数作为常数，便可迅速地计算出所需要的弹道参数来。这样做可以简化火控计算机（或计算器）的结构而不产生过大的误差。

空中射击中，常用到弹丸飞达目标的平均速度V_{PJ}，

$$V_{PJ}=\frac{D}{t}=\frac{D}{\frac{D}{V_{01}}\cdot g_t}=\frac{V_{01}}{g_t}\ 。$$

为了使用方便，常取

$$V_{PJ}=V_{01}-C_HD\cdot K_{\nabla PJ}(C_HD,V_{01}) \qquad (4\text{-}18)$$

与上式比较可得

$$K_{\nabla PJ}(C_HD,V_{01})=\frac{V_{01}}{C_HD}\left(1-\frac{1}{g_t}\right)\ 。 \qquad (4\text{-}18)'$$

诸K函数也算出后列成表格备查。

某些射击瞄准具计算弹道诸元时，当C_HD，V_{01}在一定范围内变化时，弹道函数K_t，K_η，$K_{\nabla PJ}$的变化范围较小，即可取$(K_t)_{PJ}$，$(K_\eta)_{PJ}$，$(K_{\nabla PJ})_{PJ}$值代替K_t，K_η，$K_{\nabla PJ}$函数，把它们当做常量对待，下列四个公式是常用公式。

$$\left.\begin{aligned}
t&=\frac{D}{V_{01}}[1+C_HD\cdot(K_t)_{PJ}],\\
\eta&=\frac{gD^2}{2V_{01}^2}[1+C_HD\cdot(K_\eta)_{PJ}],\\
\alpha&=\frac{gD}{2V_{01}^2}[1+C_HD\cdot(K_\eta)_{PJ}]\cdot\cos\varepsilon,\\
V_{PJ}&=V_{01}-C_HD\cdot(K_{\nabla PJ})_{PJ}\ 。
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}19)$$

此外还有三个不常用的公式

$$V\doteq U=V_{01}\frac{1}{C_HD\cdot K_u+1},$$

$$P=\frac{gD}{V_{01}^2}(C_HD\cdot K_P+1),$$

$$\omega = \frac{gD}{2V_{01}^2} \cdot (C_H D \cdot K_\omega + 1) \cdot \cos\varepsilon \ 。$$

下面举例说明取函数平均值所产生的误差。

例 4-1 某歼击机发射 23 毫米弹丸时，飞机速度 $V_1 = 300$ 米/秒，弹丸炮口初速度 $V_0 = 700$ 米/秒，$V_{01} = V_0 + V_1 = 1000$ 米/秒，弹道系数 $C = 1.67$，空战高度 H 自 4000 米至 10000 米，目标距离 $D \approx 1200$ 米。

解：查空气比重函数 $H(H)$ 。

得 $H(4000) \approx 0.668$，$C_H D = 1.67 \times 0.668 \times 1200 = 1330$，（取为 1300）。

$H(10000) = 0.336$，$C_H D = 1.67 \times 0.336 \times 1200 = 670$，（取为 700）。

根据 $C_H D$ 值及 V_{01} 值，查 K_t，K_η，K_{VPJ} 函数表并计算得：

$$(K_t)_{PJ} = \frac{1.498 + 1.653}{2} \times 10^{-4} = 1.576 \times 10^{-4},$$

最大相对误差 $\triangle = 4.7\%$ 。

$$(K_\eta)_{PJ} = \frac{2.046 + 2.319}{2} \times 10^{-4} = 2.183 \times 10^{-4},$$

最大相对误差 $\triangle \approx 5.8\%$ 。

$$(K_{VPJ})_{PJ} \approx \frac{1.355 + 1.361}{2} \times 10^{-1} = 0.1358,$$

最大相对误差 $\triangle = 0.18\%$ 。

如果我们把高度范围缩小一些，即把高度范围分成几段，每段各取各自的 K 函数平均值，则计算精度还可提高。在火控系统瞄准具中，用一个高度自动转换器即可实现按高度自动选取 K_{PJ} 值 。

例 4-2 已知歼击机使用 23-1 航炮射击，弹丸绝对初速度 $V_{01} = 1000$ 米/秒，目标距离 $D = 1200$ 米，空战高度 $H = 6000$ 米，高低角 $\varepsilon = 0°$。求抬高角 α、弹道降低量 η，弹丸飞行时间 t、弹丸平均速度 V_{PJ}、击中目标时的落角 ω 和速度 V_C 。

解：查表知 23 型弹丸 $C = 1.67$，$H(6000) = 0.538$，

则 $C_H D = 1.67 \times 0.538 \times 1200 = 1080$ 。

由 $C_H D = 1080$，$V_{01} = 1000$ 查弹道函数表得。

g_w	g_η	g_t	g_v	g_ω	K_{VPJ}
0.727	1.238	1.177	1.385	1.532	0.136

则

$$\alpha = \frac{gD}{2V_{01}^2} \cdot \cos\varepsilon \cdot g_\eta \approx \frac{9.80 \times 1200}{2 \times 1000^2} \times 1 \times 1.238$$

$$= 7.29 \times 10^{-3} \doteq 25',$$

$$\eta = \frac{gD^2}{2V_{01}^2} \cdot g_\eta \approx 7.29 \times 10^{-3} \times 1200 = 8.74 \text{ 米},$$

$$t = \frac{D}{V_{01}} \cdot g_t = \frac{1200}{1000} \times 1.177 = 1.411 \text{ 秒},$$

$$V_{PJ} = V_{01} - C_H D \cdot K_{VPJ} = 1000 - 1080 \times 0.136$$
$$= 1000 - 147 = 853 \text{ 米/秒},$$

$$\omega = \frac{gD}{2V_{01}^2} \cdot \cos\varepsilon \cdot g_\omega = \frac{9.8 \times 1200}{2 \times 1000^2} \times 1 \times 1.532$$
$$= 9.03 \times 10^{-3} \doteq 31'$$

$$V_0 = V_{01} \cdot g_u = 1000 \times 0.727 = 727 \text{ 米/秒}。$$

§2 火箭弹道的近似求解

一、引 言

火箭弹道与炮弹丸弹道的不同就在于它有推力（或推力加速度），它的弹道可以分成滑轨段、主动段和被动段三段。滑轨段是规定火箭弹运动方向并获得弹丸相对初速 V_r 的阶段。相当于炮弹丸在炮管内的运动，但没有炮弹丸那样大的相对初速，一般航空火箭弹飞离滑轨时的相对初速度约为几十米/秒，相当于炮弹丸相对初速的 $\frac{1}{10}\sim\frac{1}{20}$。通常火箭发射器（即滑轨）的方向与飞机纵轴的方向一致，而与飞机速度的方向接近一致，所以当 $t = 0$ 时相对速度 $V_r = 0$。当火箭发动机点火后，火箭弹在推力的作用下沿着滑轨向前运动，飞离滑轨时 $V_r = V_g$。主动段和滑轨段一样都在推力作用下向前加速运动。当燃料用尽时，推力为零。弹丸飞达弹道上的 K 点，主动段即告结束而进入被动段。被动段上弹丸的飞行就像炮弹丸弹道一样，作减速飞行。

火箭弹对空中目标射击时，弹道的近似求解，也可以像炮弹丸弹道那样作相同的假设简化，因为它也是在弹道的比较平直部分命中目标，目标距离不太大，弹道比较平直，敌我高度差不太大。因此，可以用 $H(H)$ 函数代替 $H(y)$ 函数，以 U 代替 V，以地面标准音速 a_{0N} 代替弹道高度上的音速，即以 $G(U)$ 代替 $G(V/a)$，以 D 代替 ξ，（参阅本章 § 1），对火箭弹道做近似求解。

二、滑轨段求解

航空火箭弹的滑轨较短，一般在 1～2 米左右。在前进方向上受空气阻力和滑轨摩擦阻力以及推力的作用，但阻力比推力要小得多。可以略去上述二个阻力的作用。因此，对于滑轨段，可以将它单独求解，也可以把它合并到主动段内合并求解。单独求解时，把滑轨段末的参数作为主动段的初始条件；合并求解时，滑轨段的初始条件就是整个主动段的初始条件。两种解法所得弹道参数差别不太大。

设滑轨长度为 l_g，在滑轨段内飞行时间为 t_g，火箭弹在推力作用下获得相对速度为 V_r，则加速度 $a = \frac{dV_r}{dt}$。有

$$a = \frac{dV_r}{dt} = u_e \frac{|\dot{q}|}{q} = -u_e \frac{1}{q} \frac{dq}{dt} \text{[参阅第一章(1-11)式]}$$

化简上式得 $$dV_r = -u_e \frac{dq}{q}。$$

在初始条件 $t=0$ 时，$V_r=0$，$q=q_0$ 积分上式，得

$$V_r=-u_e\cdot L_n\frac{q}{q_0}=u_e\cdot L_n\frac{q_0}{q}, \tag{4-20}$$

而

$$V_r=\frac{dl}{dt}\ 。 \tag{4-21}$$

上列式中 q 为火箭弹瞬时重量，q_0 为初重量，u_e 为火箭弹有效排气速度，对于固体燃料火箭 u_e 一般为 2000 米/秒左右，l 为运动距离，若燃料重 ω 公斤，燃烧时间为 t_K 秒，假定燃料为等速燃烧，则在任意时刻 t 时，弹丸重量为 $q=q_0-\frac{\omega}{t_K}\cdot t$，微分一次，得

$$dq=-\frac{\omega}{t_K}dt,\quad 即\ dt=-\frac{t_K}{\omega}dq\ 。$$

把 dt 值代入(4-21)中，得

$$\frac{dl}{dq}=\frac{t_K}{\omega}\cdot u_e\cdot L_n\frac{q}{q_0},$$

在初始条件 $l=0$ 时，$q=q_0$ 积分上式，得

$$l=u_e\frac{t_K}{\omega}\int_{q_0}^{q}L_n\frac{q}{q_0}dq=u_e\frac{t_K}{\omega}\left[\int_{q_0}^{q}L_nqdq-\int_{q_0}^{q}L_nq_0dq\right]\ 。$$

当 $l=l_g$ 时，火箭离开滑轨，$q=q_g$，代入上式，得

$$l_g=u_e\frac{q_0\cdot t_K}{\omega}\left(1-\frac{q_g}{q_0}-\frac{q_g}{q_0}\cdot L_n\frac{q_0}{q_g}\right)\ 。 \tag{4-22}$$

知 l_g 及 ω，q_0、t_K 便可从上式求得 q_g，但上式是一个对数方程，要求得 q_g 不甚方便。设法把它变化为代数方程以便求解。

因为滑轨不长，火箭弹在滑轨段内的运动时间 t_g 较小，所以 q_g 比 q_0 并不小很多，故可令 $\frac{q_0}{q_g}=1+\alpha$，式中 α 是一个大于零的微小量。将 L_n 函数展开成幂级数，

$$L_n\frac{q_0}{q_g}=L_n(1+\alpha)=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}+\cdots\cdots,$$

同时将 $2\frac{q_0-q_g}{q_0+q_g}$ 用 α 表示后也展开成幂级数，得

$$2\frac{q_0-q_g}{q_0+q_g}=2\frac{\alpha}{2+\alpha}=\alpha\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}=\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{4}\cdots\cdots\right)。$$

比较上两式，用 $2[(q_0-q_g)/(q_0+q_g)]$ 代替 $L_n(q_0/q_g)$，知其误差很小，不超过 $\alpha^3/12$。则(4-22)式可改写为：

$$l_g=u_e\cdot q_0\cdot t_K\cdot(q_0-q_g)^2/[\omega\cdot q_0(q_0+q_g)] \tag{4-23}$$

由等速燃烧条件得：$q_g=q_0-\frac{\omega}{t_K}\cdot t_g$，或 $q_0-q_g=\frac{\omega}{t_K}\cdot t_g$，把 (q_0-q_g) 及 q_g 值代入(4-23)式中整理得：

$$t_g=-\frac{1}{2}\frac{l_g}{u_e}+\sqrt{\frac{l_g^2}{4u_e^2}+\frac{2l_g\cdot q_0\cdot t_K}{u_e\cdot\omega}}\ 。$$

或
$$t_g = \frac{1}{2}\frac{l_g}{u_e}\left(\sqrt{\frac{8q_0 \cdot u_e \cdot t_K}{\omega \cdot l_g} + 1} - 1\right) 。 \tag{4-24}$$

由已知滑轨长度 l_g 及火箭弹参数 q_0，u_e，ω，t_K 值代入（4-24）中，可求得火箭弹在滑轨内运动时间 t_g，将 t_g 代入等速燃烧条件中，可求得离滑轨时的重量 q_g，将 q_g 代入(4-20)式中，可求得离滑轨时的相对速度 $V_0 = V_g = u_e \cdot L_n \frac{q_0}{q_g}$，如果发射瞬间，飞机的速度为 V_1，则火箭弹离滑轨时的绝对初速度为：

$$V_{01} = V_0 + V_1 = V_1 + u_e \cdot L_n \frac{q_0}{q_g} 。 \tag{4-25}$$

将 V_{01}，t_g，l_g，q_g，$\omega_g = (q_g - q_K)$等量作为主动段的初始条件。

三、主动段弹道的求解

滑轨段运动距离很短而且和主动段一样都是在推力作用下向前运动，都受空气阻力的影响，所不同的是滑轨段不受重力的影响。因滑轨很短，故我们干脆把滑轨段合并到主动段内一起考虑。这时主动段的初始条件为：$t = 0$ 时 $V = V_1$，$\xi = 0$，$q = q_0$，$\omega = \omega_0$，$\theta = \theta_{01}$。最后求得主动段 K 末点的弹道参数 V_K，θ_K，P_K，ξ_K，η_K 来。

设发射点的高度为 H，初始射角为 $\theta_{01} = (\alpha + \varepsilon)$，采用斜角坐标系质心运动方程组。如图 4-5 所示。

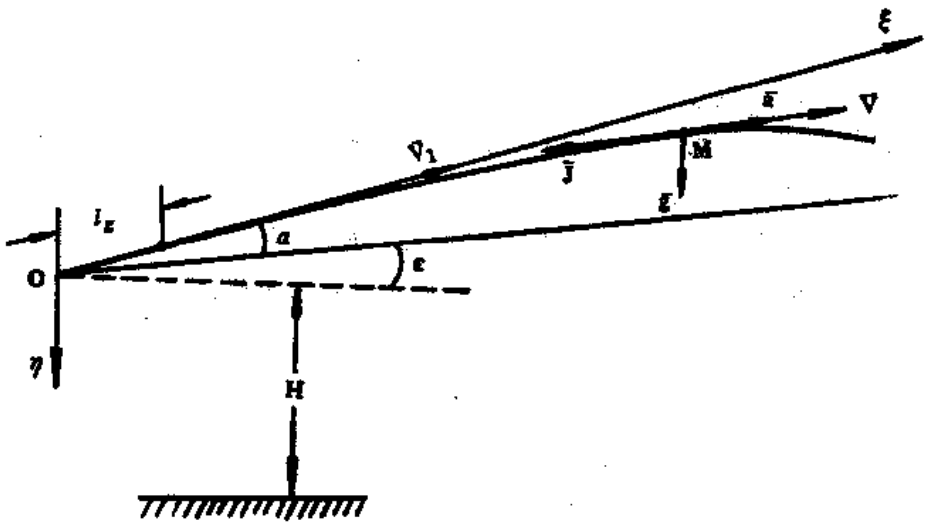


图 4-5 火箭弹道图

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dU}{dt} = a\frac{U}{V} - J\frac{U}{V} = u_e\frac{|\dot{q}|}{q}\cdot\frac{U}{V} - C_H \cdot F(V)\cdot\frac{U}{V},\\
&\frac{dW}{dt} = u_e\frac{|\dot{q}|}{q}\cdot\frac{W}{V} - C_H \cdot F(V)\cdot\frac{W}{V} + g,\\
&\frac{d\eta}{dt} = W,\\
&\frac{d\xi}{dt} = U 。\\
&\text{联系方程式：} y = H + \xi \cdot \sin\theta_{01} - \eta,
\end{aligned}\right\} \tag{4-26}$$

$$\vec{V}=\vec{U}+\vec{W}\ 。$$

上式参阅(2-7)式

式中：C—为主动段的弹道系数，$C_{主}=\frac{id^2}{q}\times 10^3$；

q—为主动段的弹重，它是变化的量。

改变为 $C_{主}=\frac{id^2}{q_K}\times 10^3\cdot\frac{q_K}{q}=C_{被}\cdot\frac{q_K}{q}$，再引入参变量$P=\frac{W}{U}$，则有

$$\frac{dP}{dt}=\frac{\dot{W}U-W\dot{U}}{U^2}\ 。$$

并以V代U，可把(4-26)式改变为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt}=-u_e\frac{\dot{q}}{q}-C_R\frac{q_K}{q}\cdot F(V), && ①\\
&\frac{dP}{dt}=\frac{g}{V}, && ②\\
&\frac{d\eta}{dt}=V\cdot P, && ③\\
&\frac{d\xi}{dt}=V, && ④\\
&y=H+\xi\cdot\sin\theta_{01}-\eta, && ⑤\\
&\vec{V}=\vec{U}+\vec{W}\ 。 && ⑥
\end{aligned}\right\}\qquad (4\text{-}27)$$

初始条件：$t=0$时，$V=V_1$，$P=0$，$\eta=0$，$\xi=0$。

（以后，火箭弹质心运动方程式中的C，均指$C_{被}$）。

1. 积分（4-27）①式可得主动段速度V。

火箭弹瞬时速度V由三部份组成：①飞机的牵连速度V_1（为已知数），②由推力而产生的速度V_P，③由阻力而产生的速度$-V_R$。即：$V=V_1+V_P-V_R$，令$V_{1P}=V_1+V_P$，则$V=V_{1P}-V_R$。

显然有 $$\frac{dV}{dt}=\frac{dV_{1P}}{dt}-\frac{dV_R}{dt}\ 。$$

上式与(4-27)①恒等，因而可以分为相对应的二个分式

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV_{1P}}{dt}=-u_e\frac{\dot{q}}{q}。 && ①\\
&\frac{dV_R}{dt}=C_R\frac{q_K}{q}\cdot F(V)。 && ②
\end{aligned}\right\}\qquad (4\text{-}28)$$

式中，C为被动段弹道系数，$C=\frac{id^2}{q_K}\times 10^3$。$F(V)=4.74\times 10^{-4}\cdot V^2\cdot C_{\bar{x}_0}\left(\frac{V}{a_{0N}}\right)$

积分(4-28)①式，初始条件：$t=0$，$q=q_0$，$V_{1P}=V_1$。

$$dV_{1P}=-u_e\frac{\dot{q}}{q}dt=-u_e\cdot\frac{dq}{q}$$

得 $$V_{1P}-V_1=u_e\cdot L_n\frac{q_0}{q},$$

$$\therefore \quad V_{1P}=V_1+V_P=V_1+u_e\cdot L_n\frac{q_0}{q}\ 。 \tag{4-29}$$

$$V_P=u_e\cdot L_n\frac{q_0}{q}\ 。$$

上式就是理论力学中的“崔欧斯基”公式，它是单考虑推力而不考虑阻力时火箭弹的速度公式，也即真空中的速度公式。当火箭到达K点时，$\frac{q_0}{q_K}$值最大，速度V_P也最大。此时燃料用尽，弹重为q_K。

$$\therefore \quad V_m=u_e\cdot L_n\frac{q_0}{q_K},\ q_K=q_0-\omega,$$

$$故 \quad V_{1PK}=V_1+V_m=V_1+u_e\cdot L_n\frac{q_0}{q_K}\ 。$$

对(4-28)②式积分求解，可求得V_R

$$\frac{dV_R}{dt}=C_H\frac{q_K}{q}F(V)=C_H\frac{q_K}{q}\cdot F(V_{1P}-V_R)。$$

在主动段中推力产生的速度和飞机牵连速度所合成的速度V_{1P}，要比阻力产生的速度V_R大得多。火箭弹道的主动段不长，一般航空火箭弹的主动段弹道为1～2百米，即使大型的陆用野战火箭弹，射程达到50公里，它的主动段也只有2公里右左。所以在主动段内，推力占主导地位，故$V_{1P}\gg V_R$，在F函数中可以略去V_R的作用，以$F(V_{1P})$代替$F(V_{1P}-V_R)$，可使求解简单。但所得V_R偏大一些，为了减少误差，可在求出V_R后，再代入F函数中作逐次逼近计算，直到满足要求的精度为止。

②式改为 $$\frac{dV_R}{dt}=C_H\frac{q_K}{q}\cdot F(V_{1P})\ 。$$

将②式与①式相除，并由等速燃烧条件$\dot{q}=\frac{-\omega}{t_K}$代入，得

$$\frac{dV_R}{dV_{1P}}=\frac{C_H\cdot q_K\cdot t_K}{u_e\cdot\omega}\cdot F(V_{1P})\ 。$$

在初始条件$t=0$时，$V_R=0$，$V_{1P}=V_1$积分上式，得

$$V_R=\frac{C_H\ q_K\cdot t_K}{u_e\cdot\omega}\int_{V_1}^{V_{1P}}F(V_{1P})dV_{1P}\ 。$$

把$\int_{V_1}^{V_{1P}}F(V_{1P})dV_{1P}$分解为$\int_0^{V_{1P}}F(V_{1P})dV_{1P}-\int_0^{V_1}F(V_{1P})dV_{1P}$。上述两个积分都可由数值积分求解。

令函数$L(V)=\frac{1}{V^3}\int_0^V F(V)dV$，经计算后列于附表10备查。函数$L(V)$的变化幅度比$\int_0^V F(V)dV$的变化幅度小得多。故在瞄准计算装置中，也可以使$L(V)$函数在某一使用范围内取平均值，而使瞄准计算装置的结构简单。则

$$V_R=\frac{C_H\cdot q_K\cdot t_K}{u_e\cdot\omega}[V_{1P}^3\cdot L(V_{1P})-V_1^3\cdot L(V_1)]\ 。 \tag{4-30}$$

求出V_R之后，可以用逐次逼近法求出较准确的V_R值。

第一次逼近计算，将(4-30)式中的V_{1P}用$(V_{1P}-V_R)$代换，得

$$V_{R1}=\frac{C_H\cdot q_K t_K}{u_e\cdot\omega}\left[(V_{1P}-V_R)^3\cdot L(V_{1P}-V_R)-V_1^3\cdot L(V_1)\right]。$$

第二次逼近计算，将$(V_{1P}-V_{R1})$取代上式中的$(V_{1P}-V_R)$，可求得V_{R2}，……至满足精度求要为止。通常工程计算中满足相对误差$\frac{V_{Rn}-V_{R(n-1)}}{V_{R(n-1)}}\leqslant 0.01$，即认为足够精确。（式中$n$为第$n$次逼近计算）。一般2～3次近逼计算已足够了。

在K点时，有

$$V_{RK}=\frac{C_H\cdot q_K\cdot t_K}{u_e\cdot\omega}\left[(V_1+V_m)^3\cdot L(V_1+V_m)-V_1^3\cdot L(V_1)\right],$$

$$V_K=V_1+V_m-V_{RK}=V_1+u_e\cdot L_n\frac{q_0}{q_K}-V_{RK}。\qquad(4\text{-}31)$$

2. 积分(4-27)②式，可求速度比P及弹道切线倾角θ。

由(4-27)②式

$$\frac{dP}{dt}=\frac{g}{V}$$

式中有变量V及P，为了方便求解，把自变量t变换为自变量V。为此引入主动段内的平均加速度a_{PJ}。设$a_{PJ}=\frac{V-V_1}{t}$，因而得

$$dt=\frac{dV}{a_{PJ}}。\qquad(4\text{-}32)$$

代入(4-27)②中，得

$$dP=\frac{g\cdot dV}{V\cdot a_{PJ}},$$

在初始条件$t=0$时，$P=0$，$V=V_1$积分上式，得

$$P=\frac{g}{a_{PJ}}\cdot L_n\frac{V}{V_1}=\frac{g\cdot t}{V-V_1}\cdot L_n\frac{V}{V_1}。\qquad(4\text{-}33)$$

上式中$g\cdot t$是η轴上的速度，$(V-V_1)$是弹道切线上的相对速度，$\frac{gt}{V-V_1}$具有$P=\frac{W}{U}$的物理意义。知V及V_1可求得P。

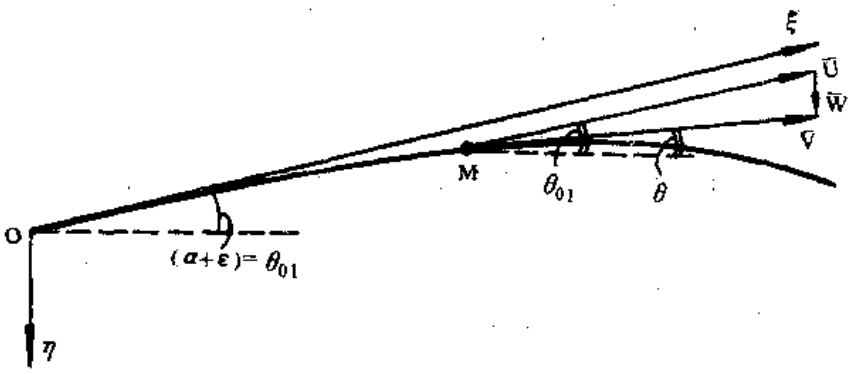


图 4-6 弹道切线倾角θ及$\bar{U}$、$\bar{V}$、$\bar{W}$关系图

在K点：
$$P_K=\frac{g\cdot t_K}{V_K-V_1}\cdot L_n\frac{V_K}{V_1}。\tag{4-34}$$

由图 4-6 可确定弹道上任意点M的切线倾角θ。由$\bar{U}$、$\bar{V}$、$\bar{W}$三矢量关系得：
$$\frac{V}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_{01}\right)}=\frac{W}{\sin(\theta_{01}-\theta)}。$$

考虑到主动段不长，弹道较平直，$(\theta_{01}-\theta)$较小，故
$\sin(\theta_{01}-\theta)\doteq\theta_{01}-\theta$，且以$U$代$V$，得
$$\frac{W}{V}\doteq\frac{W}{U}=P=\frac{\theta_{01}-\theta}{\cos\theta_{01}}。$$

即
$$\theta=\theta_{01}-P\cdot\cos\theta_{01}。\tag{4-35}$$

在K点有
$$\theta_K=\theta_{01}-P_K\cos\theta_{01}。\tag{4-35}'$$

3．求弹道降低量η

由(4-27)③式
$$\frac{d\eta}{dt}=P\cdot V$$

同 2 的方法把dt换为dV，由(4-32)式$dt=\frac{dV}{a_{PJ}}$及(4-33)式$P=\frac{g}{a_{PJ}}L_n\frac{V}{V_1}$，得
$$d\eta=\frac{gV}{a_{PJ}^2}\cdot L_n\frac{V}{V_1}\cdot dV,$$

即：
$$d\eta=\frac{gV_1^2}{a_{PJ}^2}\left(\frac{V}{V_1}\right)\cdot L_n\left(\frac{V}{V_1}\right)\cdot d\left(\frac{V}{V_1}\right)。$$

在初始条件$t=0$时，$\eta=0$，$\frac{V}{V_1}=1$，分部积分上式，得
$$\eta=\frac{gV_1^2}{a_{PJ}^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{V}{V_1}\right)^2\cdot L_n\left(\frac{V}{V_1}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{V}{V_1}\right)^2+\frac{1}{4}\right]。$$

或
$$\eta=\frac{gt^2}{2}\cdot\left(\frac{V_1}{V-V_1}\right)^2\left[\left(\frac{V}{V_1}\right)^2\cdot L_n\left(\frac{V}{V_1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{V}{V_1}\right)^2+\frac{1}{2}\right]。$$

令上式中后面部份为函数$\varphi\left(\frac{V}{V_1}\right)=\frac{1}{\left(\frac{V}{V_1}-1\right)^2}\left[\left(\frac{V}{V_1}\right)^2\cdot\left(L_n\frac{V}{V_1}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]$。

则
$$\eta=\frac{gt^2}{2}\cdot\varphi\left(\frac{V}{V_1}\right)。\tag{4-36}$$

$\varphi\left(\frac{V}{V_1}\right)$为对真空弹道下降量的修正系数，$\varphi\left(\frac{V}{V_1}\right)\geqslant 1$，可直接计算(下同)，也可予先算出后列于附表 11 备查。

在K点有
$$\eta_K=\frac{gt_K^2}{2}\cdot\varphi\left(\frac{V_K}{V_1}\right)。\tag{4-37}$$

4．求斜距离ξ

由(4-27)④式
$$\frac{d\xi}{dt}=V$$

同2的方法把 dt 换为 dV，由(4-32)式 $dt=\frac{dV}{a_{PJ}}$ 得

$$\frac{d\xi}{dV}=\frac{V}{a_{PJ}}\text{。}$$

在初条件 $t=0$ 时，$\xi=0$，$V=V_1$ 积分上式得：

$$\xi=\frac{1}{a_{PJ}}\frac{(V^2-V_1^2)}{2}\approx\left(\frac{t}{V-V_1}\right)\frac{(V^2-V_1^2)}{2}\approx\frac{V+V_1}{2}\cdot t\text{。}\qquad(4\text{-}38)$$

即
$$\xi=V_{PJ}\cdot t\text{。}$$

在K点有
$$\xi_K=\frac{V_K+V_1}{2}\cdot t_K\text{。}\qquad(4\text{-}39)$$

5. 求主动段末点K与坐标原点0的直距离 D_K

由图4-7及余弦定理，知

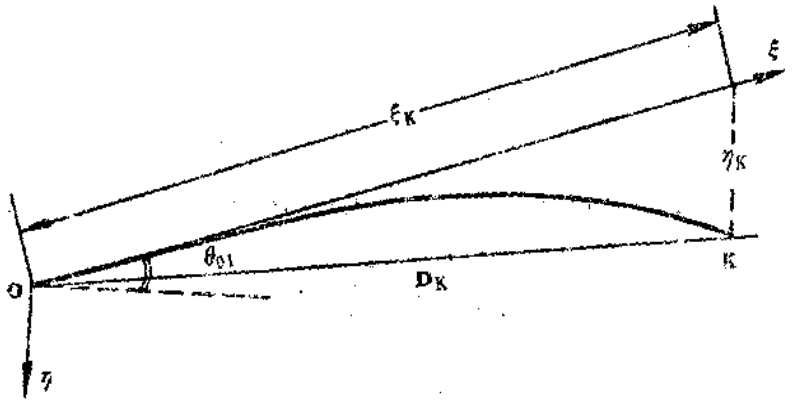


图 4-7 主动段弹道图

$$D_K=\sqrt{\xi_K^2+\eta_K^2-2\xi_K\eta_K\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_{01}\right)}\approx\sqrt{\xi_K^2+\eta_K^2}\approx\xi_K\text{。}\qquad(4\text{-}40)$$

所以，主动段末K点的弹道参数为

$$\left.\begin{aligned}
&V_K=V_{1PK}-V_{RK}\approx V_1+u_e\cdot L_n\frac{q_0}{q_K}-V_{RK},\\
&P_K=\frac{g\cdot t_K}{V_K-V_1}\cdot L_n\frac{V_K}{V_1},\\
&V_{RK}=\frac{C_B q_K t_K}{u_e\cdot\omega}[(V_1+V_m)^3\cdot L(V_1+V_m)-V_1^3L(V_1)],\\
&\theta_K\approx\theta_{01}-P_K\cdot\cos\theta_{01},\\
&\eta_K\approx\frac{g\cdot t_K^2}{2}\cdot\varphi\left(\frac{V_K}{V_1}\right),\\
&\xi_K\approx\frac{V_K+V_1}{2}\cdot t_K,\\
&D_K\approx\xi_K\text{。}
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}41)$$

四、被动段弹道的求解

1. 以主动段末点K为新坐标系原点的弹道参数求解，新坐标原点就取在K点，采用斜

角坐标系 $\xi_1 K\eta_1$，如图 4-8 所示。根据斜角坐标系炮弹丸弹道简化方程式，以 $C_H D_1$ 为自变量的运动方程组为：参阅(4-3)式：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dU_1}{dC_H D_1} &= -G(U_1),\\
\frac{dP_1}{dC_H D_1} &= \frac{1}{C_H}\cdot\frac{g}{U_1^2},\\
\frac{d\eta_1}{dC_H D_1} &= \frac{P_1}{C_H},\\
\frac{dt_1}{dC_H D_1} &= \frac{1}{C_H U_1}.
\end{aligned}\right\} \tag{4-42}$$

初始条件：当 $t_1=0$ 时，$C_H D_1=0$，$U_1=V_K$，$\eta_1=0$，$P_1=0$。式中下标 1 表示以新坐标系 $\xi_1 K\eta_1$ 为起点的量。同解炮弹丸弹道一样，可求得

$$\left.\begin{aligned}
U_1 &= V_K\cdot g_u(C_H D_1, V_K),\\
P_1 &= \frac{gD_1}{V_K^2}\cdot g_p(C_H D_1, V_K),\\
\eta_1 &= \frac{gD_1^2}{2V_K^2}\cdot g_\eta(C_H D_1, V_K),\\
t_1 &= \frac{D_1}{V_K}\cdot g_t(C_H D_1, V_K).
\end{aligned}\right\} \tag{4-43}$$

(4-43)式虽可在地面上解被动段弹道，但在空中射击时新坐标系的距离 D_1 无法在飞机上测得，在飞机上使用时需转化为以射击点 0 为原点的坐标系上去。

2. 以射击点 0 为坐标系原点的弹道参数求解，如图 4-8 所示。

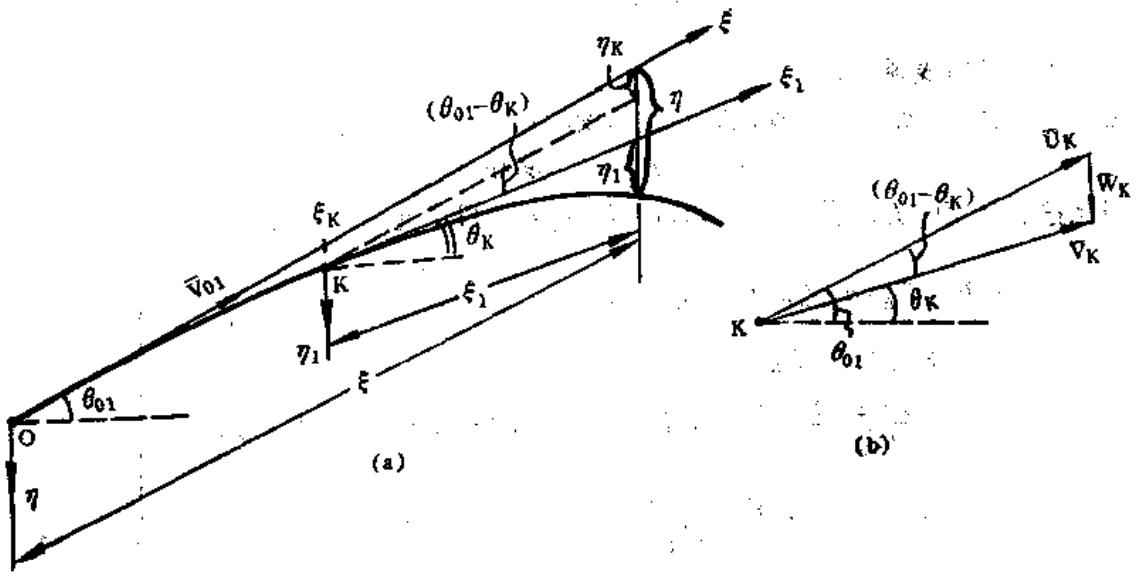


图 4-8 以 K 为原点的被动段弹道参数求解图

(a) $o\xi\eta$ 坐标与 $K\xi_1\eta_1$ 坐标量的转换图 (b) 倾角关系图

① 求 D_1 由于弹道比较平直，故 $D_1\doteq\xi_1$，而 $D_K=\xi_K$，且 $D\doteq\xi$。故近似认为 $D_1\doteq D-D_K\doteq\xi-\xi_K$。

② 求η　由图 4-8(a)知

$$\eta_1 = \eta - \eta_K - \xi_1 \frac{\cos(\theta_{01} - \theta_K)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{01}\right)} 。$$

又

$$\frac{\sin(\theta_{01} - \theta_K)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{01}\right)} = \frac{W_K}{V_K} \doteq \frac{W_K}{U_K} = P_K 。$$

故

$$\eta = \eta_1 + \eta_K + D_1 P_K 。$$

③ 求P　由定义$P = \frac{W}{U}$及图 4-9 所示。

在被动段内

$$P = \frac{W}{U} = \frac{W_K + W_1}{U} \doteq P_K + P_1 。$$

④ 求t　显然 $t = t_K + t_1$

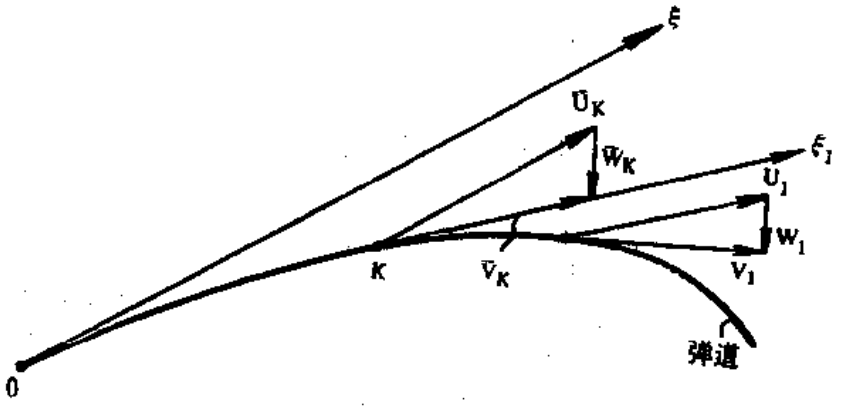


图 4-9　速比 $P=W/U$ 图

⑤ 求弹道切线倾角θ

由(4-35)式 $\theta = \theta_{01} - P \cdot \cos\theta_{01}$，在被动段时有

$$\theta = \theta_{01} - (P_K + P_1)\cos\theta_{01} 。$$

因此把 $D_1 = D - D_K$ 值代入(4-43)可以到得被动段诸元

$$\left.\begin{aligned}
&U \doteq V = V_K \cdot g_u[C_H(D - D_K),\ V_K] \\
&\eta = \eta_1 + \eta_K + D_1 \cdot P_K \\
&\quad \frac{g \cdot (D - D_K)^2}{2V_K^2} \cdot g_\eta[C_H(D - D_K), V_K] + \eta_K + (D - D_K)P_K, \\
&P \approx P_K + P_1 = P_K + \frac{g \cdot (D - D_K)}{V_K^2} \cdot g_P[C_H(D - D_K), V_K], \\
&t = t_K + t_1 = t_K + \frac{(D - D_K)}{V_K} \cdot g_t[C_H(D - D_K), V_K], \\
&\theta = \theta_{01} - P \cdot \cos\theta_{01} \\
&\quad = \theta_{01} - \left\{ P_K + \frac{g \cdot (D - D_K)}{V_K^2} \cdot g_P[C_H(D - D_K), V_K] \right\} \cos\theta_{01} 。
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}44)$$

应用(4-44)式计算被动段诸元，需先求出K点诸元V_K，η_K，P_K，θ_K，D_K等，在火控系统中用起来还不很方便。使用等效弹道法求解被动段诸元，只需求得K点的个别参数，就可比较方便地求解被动段弹道。

五、等效弹道法

等效弹道法的实质，是用一个假想的炮弹丸弹道来代替实际的火箭弹道，在相同V_1、相同距离和弹道系数的条件下，要求假想弹道和火箭弹道在被动段完全重合。假想的炮弹丸在具有初速V_{01d}，初射角θ_{01d}和初始位差η_E时所射出的弹丸，到达K点时的弹道诸元V_K、P_K、η_K、θ_K、ξ_K必与实际火箭弹道在K点时的诸元完全相等。这种假想的炮弹丸弹道，就称为等效弹道。

如图4-10所示。只要把等效弹道的初始参数V_{01d}、θ_{01d}、η_E求出，就完全可按炮弹丸相同的方法解被动段了。更重要的是经过等效后求解弹道参数的公式与求炮弹丸弹道参数的公式结构形式相同，从而使火控系统计算机计算处理火箭弹道参数时的方法与计算处理炮弹丸弹道参数时相同，只要增加一转换装置，就可做到“一机多用”。一个火控瞄准具可以同时用于发射炮弹和火箭弹。

1. 求等效弹道初速度V_{01d}

仿照(4-16)式并近似认为$V_K \approx U_K$，有

$$V_K = V_{01d} \cdot g_u(C_H D_K, V_{01d}),$$

故

$$V_{01} = \frac{V_K}{g_u(C_H D_K, V_{01n})} \quad (4\text{-}45)$$

上式中：V_K，D_K由主动段求得，g_u函数中的V_{01d}可先按$V_{01d} \doteq V_1 + V_m$代入，作初值计算，然后再用逐次逼近法求V_{01d}的较精确值。若不用逼近计算，则所得V_{01d}略偏大。

$$V_{01d1} = V_K / g_u(C_H D_K, V_{01d0}),$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$V_{01dn} = V_K / g_u(C_H D_K, V_{01d(n-1)}).$$

一般$n = 1 \sim 2$时，V_{01d}已足够精确。

2. 求初始射角θ_{01d}

仿(4-41)式$\theta_K = \theta_{01} - P_K \cdot \cos\theta_{01}$及(4-16)式$P = \frac{gD}{V_{01}^2} \cdot g_P(C_H D, V_{01})$的形式，在等效弹道中有

$$\theta_K = \theta_{01d} - P_{Kd} \cdot \cos\theta_{01d}$$
$$= \theta_{01d} - \frac{gD_K}{V_{01d}^2} \cdot g_P(C_H D_K, V_{01d}) \cdot \cos\theta_{01d}.$$

在火箭弹道中有

$$\theta_K = \theta_{01} - P_K \cos\theta_{01}.$$

由(4-41)式得

$$\theta_K \approx \theta_{01} - \frac{g \cdot t_K}{V_K - V_1} \cdot L_n \frac{V_K}{V_1} \cdot \cos\theta_{01}.$$

上两式应相等，故得

$$\theta_{01} - \theta_{01d} = P_K \cos\theta_{01} - P_{Kd} \cdot \cos\theta_{01d}.$$

∵ θ_{01} 和 θ_{01d} 都很小，近似认为 $\cos\theta_{01} \doteq \cos\theta_{1d}$ 。

∴ $$\theta_{01} - \theta_{01d} = (P_K - P_{Kd})\cos\theta_{01}。$$

令 $$\delta\alpha = (P_K - P_{Kd}) = \frac{g \cdot t_K}{V_K - V_1} \cdot L_n \frac{V_K}{V_1} - \frac{g \cdot D_K}{V_{01d}^2} \cdot g_P(C_H D_K, V_{01d})。$$

式中：P_K—为火箭弹道在K点的P值；

P_{Kd}—为等效弹道在K点的P值。

可看出 $\delta\alpha$ 值与载机速度 V_1 及火箭弹结构参数有关，其值可根据不同的 V_1 值及火箭弹结构参数事先算出后，列表备查。由上述各式可得

$$\left.\begin{aligned} &\theta_{01d} = \theta_{01} - \delta\alpha \cdot \cos\theta_{01}, \\ &\delta\alpha = \frac{g \cdot t_K}{V_K - V_1} \cdot L_n \frac{V_K}{V_1} - \frac{g \cdot D_K}{V_{01d}^2} \cdot g_P(C_H D_K, V_{01d}) 。 \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}46)$$

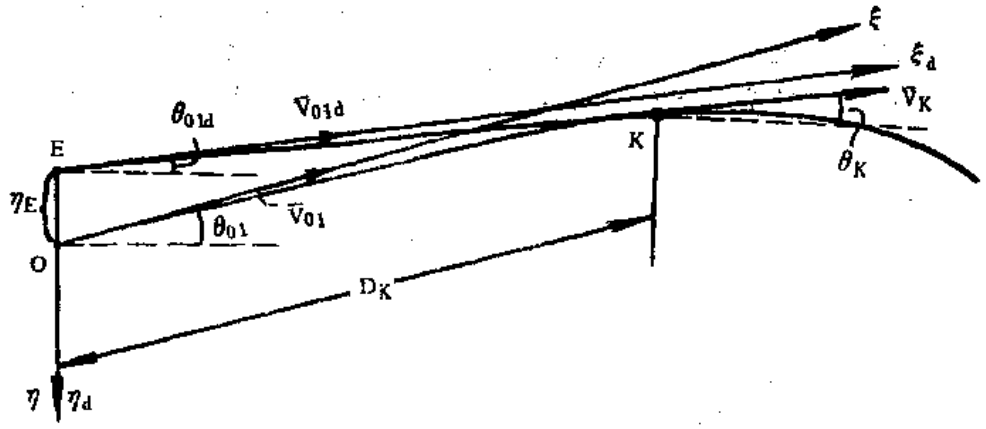


图 4-10 等效弹道图

3. 求初始位差 η_E

由图 4-11 所示，（图中各角度是夸大画的）。

若以K点处的弹道高 BK 近似代替 ξ 轴和 ξ_d 轴对应点处的高度 BD 和 BC，则由三角形关系可得

$$\frac{\eta_E}{BK} = \frac{AO}{AB} = \frac{AB - OB}{AB} 。$$

而 $BK \doteq D_K \cdot \sin\theta_{01}$，$OB \doteq D_K \cos\theta_{01}$，$AB \doteq BK \cdot \mathrm{ctg}\,\theta_{01d}$。代入上式整理后得

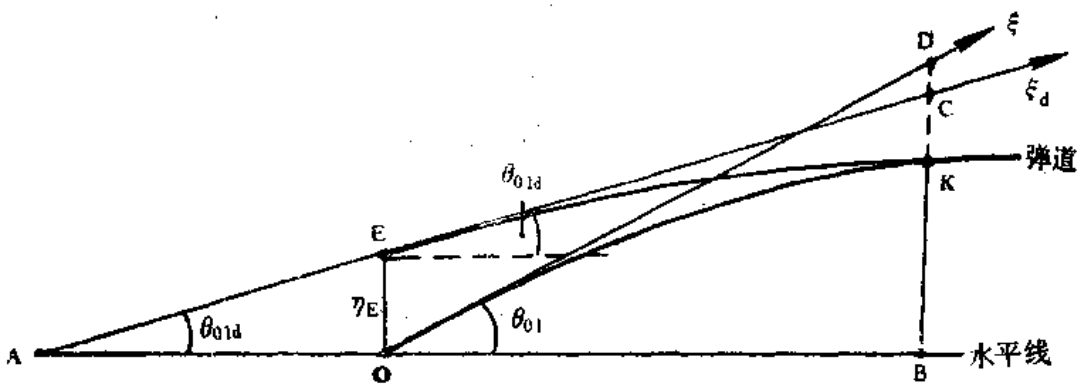


图 4-11 初始位置 η_E 求解图

$$\eta_E = D_K(\sin\theta_{01} - \cos\theta_{01}\cdot \mathrm{tg}\theta_{01d}) \quad 。 \tag{4-47}$$

$\because$ $\sin\theta_{01}\doteq\theta_{01}$，$\cos\theta_{01}\doteq 1$，$\mathrm{tg}\theta_{01d}\doteq\theta_{01d}$

故
$$\eta_E \doteq D_K\cdot(\theta_{01}-\theta_{01d}) \doteq D_K\cdot\delta\alpha \tag{4-48}$$

根据与本章第一节相同的道理，知道等效弹道的初始条件 θ_{01d}，V_{01d} 及 η_E，即可仿照(4-16)式得到等效弹道参数。

$$\left.\begin{aligned}
&V_d \doteq U_d = V_{01d}\cdot g_u(C_H D_d, V_{01d}),\\
&P_d = \frac{gD_d}{V_{01d}^2}\cdot g_P(C_H D_d, V_{01d}),\\
&\eta_d = \frac{g\cdot D_d^2}{2V_{01d}^2}\cdot g_\eta(C_H D_d, V_{01d}),\\
&t_d = \frac{D_d}{V_{01d}}\cdot g_t(C_H D_d, V_{01d}),\\
&V_{PJd} = \frac{D_d}{t_d} = \frac{V_{01d}}{g_t(C_H D_d, V_{01d})} \quad 。
\end{aligned}\right\} \tag{4-49}$$

E点的位置在0点上方，是个虚构的位置，而发射火箭弹是在0点瞄准计算的。因此，上述(4-49)式并不能直接用于0点的瞄准计算，必须把它转化到 $\xi o\eta$ 坐标上来。

4. 转化到以0为原点的坐标系的等效弹道。

如图4-12所示。

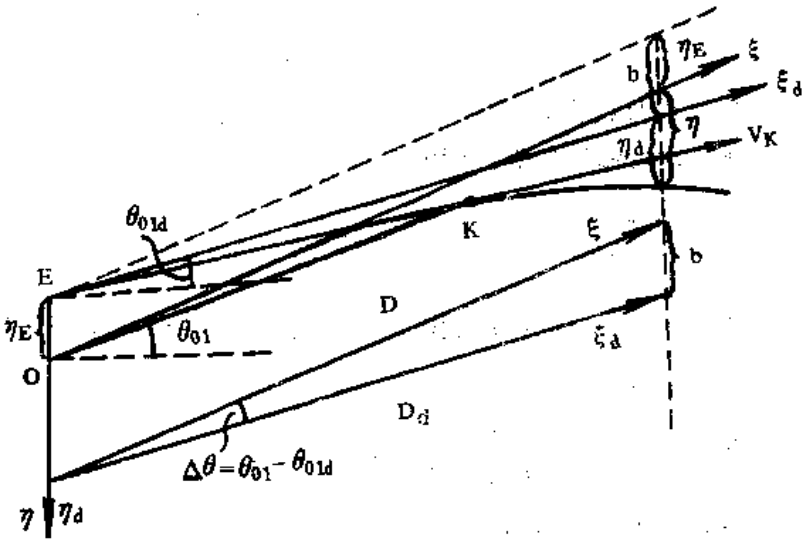


图 4-12 以0为原点的等效弹道图

① 目标距离D 由于 θ_{01} 和 θ_{01d} 相差不多，且弹道比较平直，可认为，$D\doteq\xi$，$D_d=\xi_d$ 故 $D\doteq D_d$。

D可由测距仪器直接测得。

② 弹道降低量 η：

由图4-12知：
$$\eta = \eta_d + b - \eta_E \tag{4-50}$$

式中：
$$b = \frac{D_d}{\cos\theta_{01}}\cdot\sin(\theta_{01}-\theta_{01d}) \doteq D\frac{\theta_{01}-\theta_{01d}}{\cos\theta_{01}} = D\cdot\delta\alpha,$$

$$\eta_\delta = \frac{gD^2}{2V_{01\delta}^2}\cdot g_\eta(C_H D, V_{01\delta}),$$

$$\eta_E = D_K\cdot(\sin\theta_{01} - \cos\theta_{01}\cdot \mathrm{tg}\theta_{01\delta}) \doteq D_K\cdot\delta\alpha,$$

$$\therefore \quad \eta = \eta_\delta + (D - D_K)\cdot\delta\alpha \ 。 \tag{4-51}$$

③ 弹道切线倾角 θ

由(4-46)式 $\quad \theta_{01\delta} = \theta_{01} - \delta\alpha\cdot\cos\theta_{01}$

代入(4-35)式中得

$$\theta = \theta_\delta = \theta_{01\delta} - P_\delta\cdot\cos\theta_{01\delta}$$
$$= \theta_{01} - \delta\alpha\cdot\cos\theta_{01} - P_\delta\cdot\cos\theta_{01\delta} \ 。$$

近似以 $\cos\theta_{01}$ 代替 $\cos\theta_{01\delta}$ 得

$$\theta = \theta_{01} - \left[\frac{gD}{V_{01\delta}^2}\cdot g_P(C_H D, V_{01\delta}) + \delta\alpha\right]\cos\theta_{01} \ 。 \tag{4-52}$$

④飞行时间 t

由于 $V_{01} > V_1$，而等效弹丸是减速飞行的，故 $V_{01} > V_K$。等效弹丸飞达 K 点的时间 $t_{K\delta}$ 必少于 t_K，其差值为

$$\delta t = t_K - t_{K\delta} = t_K - \frac{D_K}{V_{01\delta}}\cdot g_t(C_H D_K, V_{01\delta}) \ 。 \tag{4-53}$$

因此火箭弹丸飞达被动段中目标的时间 t 为

$$t = t_\delta + \delta t = \frac{D}{V_{01\delta}}\cdot g_t(C_H D, V_{01\delta}) + t_K - \frac{D_K}{V_{01\delta}}\cdot g_t(C_H D_K, V_{01\delta}) \ 。 \tag{4-54}$$

δt 值与火箭弹结构参数及载机速度 V_1 有关，可以事先算出后，列表备查。

综上所述，火箭弹被动段弹道的等效解为：

$$\left.\begin{aligned}
&V_{01\delta} = \frac{V_K}{g_u(C_H D_K, V_{01\delta})},\\
&\left(\text{可用 } V_1 + u_c\cdot L_n\frac{q_0}{q_K} \text{代替 } g_u \text{ 函数中的 } V_{01\delta} \text{ 作逐次逼近计算}\right)\\
&\eta_E = D_K\cdot\delta\alpha \doteq \xi_K\cdot\delta\alpha,\\
&\delta\alpha = \frac{g\cdot t_K}{V_K - V_1}\cdot L_n\left(\frac{V_K}{V_1} - \frac{gD_K}{V_{01\delta}^2}\cdot g_P(C_H D_K, V_{01\delta})\right) \ 。
\end{aligned}\right\} \tag{4-55}$$

要求得上述初始值，要求解 V_K，D_K 并查表（或计算）求 $\delta\alpha$ 。

$$\left.\begin{aligned}
&V \doteq U = V_{01\delta}\cdot g_u(C_H D, V_{01\delta}),\\
&\eta = \eta_\delta + (D - D_K)\cdot\delta\alpha,\\
&\theta = \theta_{01} - \left[\frac{gD}{V_{01\delta}^2}\cdot g_P(C_H D, V_{01\delta}) + \delta\alpha\right]\cos\theta_{01},\\
&t = \frac{D}{V_{01\delta}} g_t(C_H D, V_{01\delta}) + \delta t,\\
&\alpha = \frac{\eta}{D}\cdot\cos\varepsilon \doteq \frac{\eta}{D}\cos\theta_{01\delta},
\end{aligned}\right\}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&V_{PJ}=\frac{D}{t},\\
&D_K\doteq\xi_K=\frac{V_K+V_1}{2}\cdot t_K,\\
&V_K=V_1+u_e\cdot L_n\frac{q_0}{q_K}-V_{RK},\\
&V_{RK}=\frac{C_H\cdot q_K\cdot t_K}{u_e\cdot\omega}[(V_1+V_m)^3\cdot L(V_1+V_m)-V_1^3\cdot L(V_1)]\text{(可逼近计算)},\\
&V_m=u_e\cdot L_n\frac{q_0}{q_K},\\
&\delta t=t_K-\frac{D_K}{V_{01\delta}}\cdot g_t(C_HD_K,V_{01\delta})\text{(也可查表)},\\
&\eta_\delta=\frac{gD^2}{2V_{01\delta}^2}\cdot g_\eta(C_HD,V_{01\delta})\ 。
\end{aligned}
\right\}\quad(4\text{-}56)
$$

例 4-3 已知57-1型火箭被动段弹道系数 $C=1.3$，$t_K=0.9$ 秒，$\omega=0.86$ 公斤，$q_0=3.80$ 公斤，$q_K=2.94$ 公斤，$u_e=2170$ 米/秒，载机速度 $V_1=220$ 米/秒，发射高度 $H=2000$ 米，$\theta_{01}=20°$，发射器长 $l_g=1$ 米，$D=2000$ 米。试求滑轨段，主动段末及被动段等效弹道参数。

解 1. 滑轨段：（全部用公斤，米，秒，弧度制）

$$
t_g=\frac{1}{2}\ \frac{l_g}{u_e}\left(\sqrt{\frac{8\cdot q_0\cdot u_e\cdot t_K}{\omega\cdot l_g}+1}-1\right)
$$

$$
=\frac{1\times1}{2\times2170}\left(\sqrt{\frac{8\times3.8\times2170\times0.9}{0.86\times1}+1}-1\right)=0.0603\text{ 秒},
$$

$$
q_g=q_0-\frac{\omega}{t_K}t_g=3.8-\frac{0.86}{0.9}\times0.0603=3.74\text{ 公斤},
$$

$$
V_g=u_e\cdot L_n\frac{q_0}{q_g}=2170\times L_n\frac{3.8}{3.74}=34.5\text{ 米/秒},
$$

$$
V_{01}=V_0+V_1=34.5+220=254.5\text{ 米/秒}\ 。
$$

解 2. 主动段末点 K 的弹道参数

$$
V_{1PK}=V_1+V_m=220+u_e\cdot L_n\frac{q_0}{q_K}
$$

$$
=220+2170\times L_n\frac{3.8}{2.94}=776.8\text{ 米/秒},
$$

$$
V_{RK}=\frac{C_H\cdot q_K\cdot t_K}{u_e\cdot\omega}[(V_{1PK}-V_{RK})^3\cdot L(V_{1PK}-V_{RK})-V_1^3\cdot L(V_1)]\text{米/秒}。
$$

若简略计算，（　　）内略去 V_{RK} 得

$$
V_{RK}=\frac{1.3\times0.824\times2.94\times0.9}{2170\times0.96}[776.8^3\cdot L(776.8)-220^3\cdot L(220)]
$$

$$
=66.6\text{ 米/秒}。
$$

若逐次逼近计算则：

第 1 次 $V_{RK1}=\frac{C_H\cdot q_K\cdot t_K}{u_e\cdot\omega}[(V_{1PK}-V_{RK})^3\cdot L(V_{1PK}-V_{RK})-V_1^3L(V_1)]$

$=1.3606\times10^{-3}[(776.8-66.6)^3\times L(710.2)-433.37]$

$=50.8$ 米/秒，

第 2 次 $V_{RK2}=1.3606\times10^{-3}[726^3\cdot L(726)-433.37]$

$=54.3$ 米/秒，

第 3 次 $V_{RK3}=1.3606\times10^{-3}[722.5^3\times L(722.5)-433.37]$

$=53.5$ 米/秒 。

$|V_{RK3}-V_{RK2}|=0.8$ 米/秒，已足够精确。

∴ $V_K=V_{1PK}-V_{RK}=776.8-53.5=723.3$ 米/秒。

可看出若不用逼近计算，则 V_K 误差为：

$723.3-710.2=13.1$ 米秒，相对误差为1.8% 。

$$P_K=\frac{g\cdot t_K}{V_K-V_1}\cdot L_n\frac{V_K}{V_1}=\frac{9.8\times0.9}{723.3-220}\times L_n\frac{723.3}{220}=0.02086,$$

$$\theta_K=\theta_{01}-P_K\cos\theta_{01}=\frac{20\pi}{180}-0.02086\times\cos20^\circ$$

$=0.32946$ 弧度$=18.88^\circ=18^\circ52'$,

$$\eta_K=\frac{g\cdot t_K^2}{2}\cdot\varphi\left(\frac{V_K}{V_1}\right)=\frac{9.8\times0.9^2}{2}\times\varphi\left(\frac{723.3}{220}\right)=6.04\text{ 米},$$

$$\xi_K=\frac{V_K+V_1}{2}\cdot t_K=\frac{723.3+220}{2}\times0.9=424.5\text{ 米},$$

$$D_K=\sqrt{\xi_K^2+\eta_K^2-2\xi_K\eta_K\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_{01}\right)}$$

$$=\sqrt{424.5^2+6.04^2-2\times424.5\times6.04\times\cos70^\circ}=423.5\text{米}\doteqdot\xi_K\ 。$$

解 3. 求被动段的等效弹道数参（以下单位均为公斤、米、秒制）

$$V_{01d}=\frac{V_K}{g_u(C_HD_K,V_{01d})},$$

近似计算时，g_u 中以 V_{1PK} 代替 V_{01d} 。

则 $V_{01d}=723.3/g_u(1.3\times0.824\times423.5,\ 776.8)$

$=723.3/g_u(453.6,\ 776.8)=723.3/0.8648=836.3$ 。

若用逐次逼近计算，则把 V_{01d} 的新值代替 g_u 中的旧值得：

$V_{01d}=723.3/g_u(453.6,836.3)=723.3/0.8691=832.2$ 。

可看出，本例逼近计算一次即足够精确。

$|(V_{01d1}-V_{01d0})/V_{01d1}|=4.1/832.2=0.005$ 。

$$\delta\alpha=\frac{g\cdot t_K}{V_K-V_1}\cdot L_n\frac{V_K}{V_1}-\frac{gD_K}{V_{01d}^2}\cdot g_P(C_HD_K,V_{01d})$$

$$=P_K-\frac{9.8\times423.5}{832^2}\cdot g_P(453.6,776.8)$$

$=0.02086-0.00599\times1.1524=0.01395$ 弧度，

$$\theta_{01\delta}=\theta_{01}-\delta\alpha\cdot\cos\theta_{01}=\frac{20\pi}{180}-0.01395\times\cos20^\circ$$

$$=0.3360\text{ 弧度}=19.25^\circ=19^\circ14',$$

$$\eta_B=D_K\cdot\delta_\alpha=423.5\times0.01395=5.91\ 。$$

目标点处的等效弹道参数为：

$$V=V_{01\delta}\cdot g_u(C_HD,V_{01\delta})$$

$$=832.2\times g_u(1.3\times0.824\times2000,832.2)$$

$$=832.2\times g_u(2142.4,832.2)=832.2\times0.4894=407.3,$$

$$\eta=\eta_\delta+(D-D_K)\delta\alpha$$

$$=\frac{gD^2}{2V_{01\delta}^2}\cdot g_\eta(C_HD,V_{01\delta})+(2000-423.5)\times0.01395$$

$$=\frac{9.8\times2000^2}{2\times832^2}\cdot g_\eta(2142.4,832.2)+21.99$$

$$=47.6+21.99=69.6,$$

$$\theta=\theta_{01}-\left[\frac{gD}{V_{01\delta}^2}\cdot g_P(C_HD,V_{01\delta})+\delta\alpha\right]\cos\theta_{01}$$

$$=\frac{20\pi}{180}-\left[\frac{9.8\times2000}{832^2}\cdot g_P(2142.4,832.2)+0.01395\right]\cdot\cos20^\circ$$

$$=0.3491-[0.0283\times2.2013+0.01395]\times0.9397$$

$$=0.2776\text{ 弧度}=15.897^\circ=15^\circ53',$$

$$\delta t=t_K-\frac{D_K}{V_{01\delta}}\cdot g_t(C_HD_K,V_{01\delta})$$

$$=0.9-\frac{423.5}{832.2}\cdot g_t(453.6,832.2)=0.9-\frac{432.5}{832.2}\times1.0695=0.356,$$

$$t=\frac{D}{V_{01\delta}}\cdot g_t(C_HD,V_{01\delta})+\delta t$$

$$=\frac{2000}{832.2}\cdot g_t(2142.4,\ 832.2)+0.356$$

$$=\frac{2000}{832.2}\times1.4531+0.356=3.85,$$

$$\alpha=\frac{\eta}{D}\cdot\cos\theta_{01\delta}=\frac{69.6}{2000}\times\cos19.25^\circ$$

$$=0.03285\text{ 弧度}=1.88^\circ=1^\circ52',$$

$$V_{PJ}=\frac{D}{t}=\frac{2000}{3.85}=519.5\ 。$$

§3 直角小抬高角坐标系射击弹道的近似求解

一、引言

前面讨论的斜角坐标系射击弹道的似近解法，由它的简化条件就决定它只适用于射程较

短(2000 米以内)、目标高低角较小（30° 以内）的情况。随着飞机速度的提高，空战时间相对地缩短。因此，需要增大射击距离和目标高低角，若仍采用斜角坐标系近似解法，必然会产生较大的原理误差。误差的原因主要是以 $H(H)\cdot G(U)$ 代替了 $H(y)\cdot G(V,a)$，当射程增大且 ε 增大时，弹道高度 y 变化较大，再以射击点高度 H 代替整个弹道各点 y 的空气比重函数，以及以地面标准音速代替弹道各点的音速所解得弹道参数，其误差就增大到不容忽略的程度了。例如当射程 $D=5000$ 米，$\varepsilon=45^\circ$ 时，弹道高 y 与射击点 0 处的高度差将达到约 3535 米，再用 $H(H)$ 代替 $H(y)$，将产生约 $H(y-H)-H(H)\doteq 0.3$ 的绝对误差。

下面讨论的方法其基本思路是进一步虑考了弹道高度也即目标高低角 ε 的影响，构成 $(C_BD,V_{01},\varepsilon)$ 三头标的弹道函数，用以计算弹道诸元。它虽然属于近似解法，但比起斜角坐标系近似法来说，要精确得多。它适用于射程稍远、ε 角较大的情况，例如地对空射击或空对地射击的情况。

为了分析的方便，下面分三种情况讨论。

二、在地面射击时的近似求解

地面射击时，$H=0$，音速为标准值 a_{0N}，由第二章知直角小抬高角弹丸质心运动方程组为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{d\xi}=-C\cdot H_\tau(y)\cdot G(V_\tau)\frac{1}{\cos\varphi}-\frac{g\cdot\sin(\varphi+\varepsilon)}{V\cdot\cos\varphi} && ①\\
&\frac{d\varphi}{d\xi}=-\frac{g\cdot\cos(\varphi+\varepsilon)}{V^2\cos\varphi}, && ②\\
&\frac{dt}{d\xi}=\frac{1}{V\cdot\cos\varphi}, && ③\\
&\frac{d\zeta}{d\xi}=\operatorname{tg}\varphi\ 。 && ④
\end{aligned}\right\}\qquad (4\text{-}57)$$

上式参阅(2-17)式。

联系方程式　　$y=\ \xi\sin\varepsilon+\zeta\cos\varepsilon$

初始条件：　　$\xi=0$ 时，$V=V_{01}$，$\varphi=a$，$t=0$，$\zeta=0$ 。

由于射程 D 在 5000 米以内，故 α，ξ，φ 都很小（仍为小抬高角弹道）。在计算比重函数 $H_\tau(y)$ 时，可取 $y=\xi\cdot\sin\varepsilon$，略去 ζ 量。也就是说以直线 0 ξ 上各点的比重变化代替弹道上各点的比重变化，这当然比以射击点 0 处的比重函数代替弹道上各点的比重函数要准确得多。如图 4-13 所示。同理，令 $\cos\varphi\doteq 1$，$\operatorname{tg}\varphi\doteq\varphi$，$\sin(\varepsilon+\varphi)\doteq\sin\varepsilon$。（图中 α 角是夸大画的）。则(4-57)式中有

$$\cos(\varphi+\varepsilon)/\cos\varphi=\frac{\cos\varphi\cdot\cos\varepsilon-\sin\varphi\cdot\sin\varepsilon}{\cos\varphi}=\cos\varepsilon(1-\varphi\cdot\operatorname{tg}\varepsilon)\ 。$$

在地面上 $a=a_{0N}$，故(4-57)式改写为：（不虑考音速随高度的变化）。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{d\xi}=-C\cdot H_\tau(\xi\cdot\sin\varepsilon)\cdot G(V_\tau)-\frac{g\cdot\sin\varepsilon}{V}, && ①\\
&\frac{d\varphi}{d\xi}=\frac{-g}{V^2}\cdot\cos\varepsilon(1-\varphi\operatorname{tg}\varepsilon), && ②
\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dt}{d\xi}=\frac{1}{V},\qquad ③\\&\frac{d\zeta}{d\xi}=\varphi\ 。\qquad ④\end{aligned}\right\}\qquad (4\text{-}58)$$

初始条件：当 $\xi=0$ 时，$V=V_{01}$，$\varphi=\alpha$，$t=0$，$\zeta=0$ 。

简化后所产生的误差不大，但方程式的联立性被破坏，可以依次单独求解。

取 $C\xi$ 为自变量，并取

$$\psi=\frac{V}{V_{01}},\quad \phi=\frac{\sin\varepsilon}{C}\ 。$$

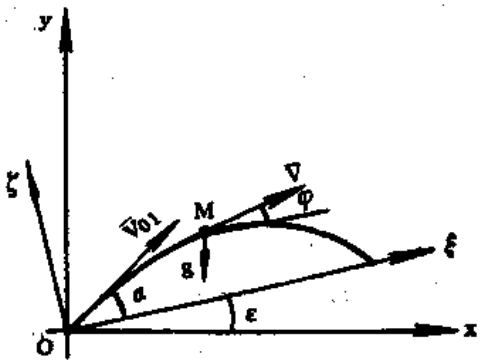


图 4-13 直角小抬高角弹道简化求解图

1. 对(4-58)①式积分，将①式变为

$$\frac{d\psi}{d(C\xi)}=-H_{\psi}(C\cdot\xi\cdot\phi)\cdot G(\psi\cdot V_{01})\frac{1}{V_{01}}-\frac{g\phi}{\psi\cdot V_{01}^2}。$$

式中，在某次射击时 ϕ，V_{01}，g 是已知量，因此上式是 ψ 对 $C\xi$ 的微分方程式，在初始条件 $C\xi=0$ 时 $\psi=1$，积分上式，可用数值积分的方法积得 $\psi=\psi(C\xi)$ 的函数关系式。对于不同的 V_{01} 及 ϕ（即 ε）值，可得到 $\psi=F_V(C\xi,V_{01},\phi)$ 的函数关系。

故
$$V=V_{01}\cdot F_V(C\xi,V_{01},\phi)\qquad (4\text{-}59)$$

在目标点，
$$V_{末}=V_{01}\cdot F_V(CD,V_{01},\phi)\qquad (4\text{-}59)'$$

$F_V(C\xi,V_{01},\phi)$ 是三头标弹道函数表，可以事先计算后列成表格备查。从（4-59）式可看出 $F_V(C\xi,V_{01},\phi)\leqslant 1$。当 $C\xi=0$ 时，$F_V(0,V_{01},\phi)=1$。

2. 对(4-58)②式积分，把①式的解代入②中

将②式 $\frac{d\varphi}{d\xi}=-\frac{g}{V^2}\cdot\cos\varepsilon(1-\varphi\cdot\mathrm{tg}\varepsilon)$ 改写为

$$\frac{d\varphi}{d\xi}=-\frac{g\cdot\sin\varepsilon}{\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}\cdot V_{01}^2\cdot F_V^2}(1-\varphi\cdot\mathrm{tg}\varepsilon)\ 。$$

即：
$$\frac{d(1-\varphi\mathrm{tg}\varepsilon)}{(1-\varphi\mathrm{tg}\varepsilon)}=\frac{g\cdot\sin\varepsilon}{V_{01}^2\cdot F_V^2\cdot C}d(C\xi)=\frac{g\phi}{V_{01}^2\cdot F_V^2}d(C\xi)。$$

在初条件：$C\xi=0$ 时，$\varphi=\alpha$ 积分上式得

$$\int_{\alpha}^{\varphi}\frac{d(1-\varphi\cdot\mathrm{tg}\varepsilon)}{(1-\varphi\cdot\mathrm{tg}\varepsilon)}=\frac{g\phi}{V_{01}^2}\int_0^{C\xi}\frac{d(C\xi)}{F_V^2},$$

$$L_n\frac{1-\varphi\mathrm{tg}\varepsilon}{1-\alpha\mathrm{tg}\varepsilon}=\frac{g\phi}{V_{01}^2}\int_0^{C\xi}\frac{d(C\xi)}{F_V^2},$$

即
$$\frac{1-\varphi\mathrm{tg}\varepsilon}{1-\alpha\mathrm{tg}\varepsilon}=\mathrm{Exp}\left\{\frac{g\phi}{V_{01}^2}\int_0^{C\xi}\frac{d(C\xi)}{F_V^2}\right\}\ 。$$

化简得：
$$\varphi=\alpha\cdot\mathrm{Exp}\left\{\frac{g\phi}{V_{01}^2}\int_0^{C\xi}\frac{d(C\xi)}{F_V^2}\right\}-\frac{1}{\mathrm{tg}\varepsilon}\left[\mathrm{Exp}\left\{\frac{g\phi}{V_{01}^2}\int_0^{C\xi}\frac{d(C\xi)}{F_V^2}\right\}-1\right]。$$

令 $$F_\varphi(C\xi,V_{01},\phi)=\mathrm{Exp}\left\{\frac{g\phi}{V_{01}^2}\int_0^{C\xi}\frac{d(C\xi)}{F_V^2}\right\},$$

则 $$\varphi=\alpha\cdot F_\varphi(C\xi,V_{01},\phi)-\frac{1}{\mathrm{tg}\varepsilon}[F_\varphi(C\xi,V_{01},\phi)-1] \qquad (4\text{-}60)$$

$F_\varphi(C\xi,V_{01},\phi)$函数在$F_V$函数求得后，可用数值积分法求得，并编成表格备查。

由初始条件，$C\xi=0$时$\varphi=\alpha$，可知$F_\varphi(0,V_{01},\phi)=1$且有

$$F_\varphi(C\xi,V_{01},\phi)\geqslant 1 \text{ 。}$$

3. 对(4-58)③式积分，将(4-59)式V值代入，得

$$\frac{dt}{d\xi}=\frac{1}{V}=\frac{1}{V_{01}\cdot F_V} \text{ 。}$$

即 $$\frac{dt}{dC\xi}=\frac{1}{C\cdot V_{01}\cdot F_V} \text{ 。}$$

在初始条件，$C\xi=0$，$t=0$，积分上式，得

$$t=\frac{1}{C\cdot V_{01}}\int_0^{C\xi}\frac{d(C\xi)}{F_V}=\frac{\xi}{V_{01}}\cdot\frac{1}{C\xi}\int_0^{C\xi}\frac{d(C\xi)}{F_V} \text{ 。}$$

令 $$F_t(C\xi,V_{01},\phi)=\frac{1}{C\xi}\int_0^{C\xi}\frac{d(C\xi)}{F_V},$$

则 $$t=\frac{\xi}{V_{01}}\cdot F_t(C\xi,V_{01},\phi) \text{ 。} \qquad (4\text{-}61)$$

当$\xi=D$时，t为飞达目标的时间T，则有

$$T=\frac{D}{V_{01}}\cdot F_t(CD,V_{01},\phi) \qquad (4\text{-}61)'$$

当$C\xi=0$时，$F_t(0,V_{01},\phi)=1$ 。

因为 $F_t(C\xi,V_{01},\phi)=\lim\limits_{C\xi\to 0}\frac{1}{C\xi}\int_0^{C\xi}\frac{d(C\xi)}{F_V}$，用洛必达法则，可得

$$F_t=\lim_{C\xi\to 0}\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{F_V}=1 \text{ 。}$$

弹丸飞行中是减速前进的，故$T>\frac{D}{V_{01}}$，所以知道

$$F_t(C\xi,V_{01},\phi)\geqslant 1 \text{ 。}$$

F_t函数也可事先算出后编表备查。

4. 对(4-58)④式积分，将(4-60)式φ值代入，得

$$\frac{d\zeta}{dC\xi}=\frac{\varphi}{C}=\frac{1}{C}\left[\alpha\cdot F_\varphi-\frac{1}{\mathrm{tg}\varepsilon}(F_\varphi-1)\right] \text{ 。}$$

在$C\xi=0$时$\zeta=0$的初始条件下积分上式得

$$\zeta=\frac{1}{C}\int_0^{C\xi}\left[\alpha\cdot F_\varphi-\frac{1}{\mathrm{tg}\varepsilon}(F_\varphi-1)\right]d(C\xi) \text{ 。}$$

又将$C\xi=CD$时，$\zeta=0$的末条件代入上式，得

$$0=\frac{1}{C}\int_0^{CD}\left[\alpha\cdot F_\varphi-\frac{1}{\mathrm{tg}\varepsilon}(F_\varphi-1)\right]d(C\xi) \text{ 。}$$

故
$$\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\varepsilon}\cdot\frac{\int_0^{CD}F_\varphi d(C\xi)-CD}{\int_0^{CD}F_\varphi d(C\xi)}\ 。$$

令函数
$$F_\alpha(CD,V_{01},\phi)=\frac{2V_{01}^2}{g\cdot CD}\cdot\frac{\int_0^{CD}F_\varphi d(C\xi)-CD}{\phi\int_0^{CD}F_\varphi d(C\xi)},$$

得
$$\alpha=\frac{gD}{2V_{01}^2}\cdot\cos\varepsilon\cdot F_\alpha(CD,V_{01},\phi)\ 。\tag{4-62}$$

F_α 函数可在 F_φ 函数求得后积分求得，也可列表备查。当 $CD=0$ 时，$F_\alpha(0,V_{01},\phi)=1$。这可用洛必达法则求得

$$\lim_{CD\to0}F_\alpha=\lim_{CD\to0}\frac{2V_{01}^2}{gCD}\cdot\frac{\int_0^{CD}F_\varphi d(C\xi)-CD}{\phi\int_0^{CD}F_\varphi d(C\xi)}$$ 分子分母对 CD 各求导一次

$$=\frac{2V_{01}^2}{g\phi}\lim_{CD\to0}\frac{F_\varphi-1}{\int_0^{CD}F_\varphi d(C\xi)+CD\cdot F_\varphi}$$ 分子分母对 CD 再求导一次

$$\lim_{CD\to0}F_\alpha=\frac{2V_{01}^2}{g\phi}\cdot\lim_{CD\to0}\frac{F'_\varphi(CD)}{F_\varphi+F_\varphi+F'_\varphi(CD)\cdot CD}\ 。$$

而
$$F'_\varphi=\left[\mathrm{Exp}\left\{\frac{g\phi}{V_{01}^2}\int_0^{CD}\frac{d(C\xi)}{F_V^2}\right\}\right]'=\mathrm{Exp}\left\{\frac{g\phi}{V_{01}^2}\int_0^{CD}\frac{d(C\xi)}{F_V^2}\right\}\cdot\frac{g\phi}{V_{01}^2}\cdot\frac{1}{F_V^2}$$

则上式为
$$F_\alpha(0,V_{01},\phi)=\frac{2V_{01}^2}{g\phi}\lim_{CD\to0}\frac{(g\phi/V_{01}^2)\cdot(1/F_V^2)\cdot F_\varphi}{F_\varphi+F_\varphi+(g\phi/V_{01}^2)\cdot(1/F_V^2)\cdot F_\varphi\cdot CD}$$
$$=\frac{2V_{01}^2}{g\phi}\lim_{CD\to0}\frac{g\phi}{V_{01}^2}\cdot\frac{F_\varphi}{F_V^2}\cdot\frac{1}{2F_\varphi}=\lim_{CD\to0}\frac{1}{F_V^2}=1\ 。$$

由(4-62)式可知，因弹道随 D 的增大而越来越弯曲，故 $F_\alpha(CD,V_{01},\phi)\geqslant1$。

5. 求 V_{PJ} 值，由(4-61)式得
$$V_{PJ}=\frac{D}{T}=V_{01}\cdot\frac{1}{F_t(CD,V_{01},\phi)}=V_{01}\cdot F_{VPJ}(CD,V_{01},\phi)\tag{4-63}$$

$F_{VPJ}(CD,V_{01},\phi)=1/F_t(CD,V_{01},\phi)$，也可编表备查。

综上所述，利用数值积分法可求得以 CD、V_{01}、ϕ 为自变量的三个头标的弹道函数表，从而可求得目标点处弹道诸元。

这些弹道诸元的计算式是

$$\left.\begin{aligned}
&V=V_{01}\cdot F_V(CD,V_{01},\phi),\\
&V_{PJ}=V_{01}\cdot F_{VPJ}(CD,V_{01},\phi),\\
&\alpha=\frac{gD}{2V_{01}^2}\cdot\cos\varepsilon\cdot F_\alpha(CD,V_{01},\phi),\\
&\varphi=\alpha\cdot F_\varphi(CD\cdot V_{01},\phi)-\frac{1}{\mathrm{tg}\varepsilon}[F_\varphi(CD,V_{01},\phi)-1],\\
&T=\frac{D}{V_{01}}\cdot F_t(CD,V_{01},\phi)\ 。
\end{aligned}\right\}\tag{4-64}$$

式中：C—为弹道系数；$\phi = \sin\varepsilon / C$ 。

上式适用条件为：地面射击时，高度$H = 0$，空气为标准气象条件，并按标准分布定律分布的情况。

有了地面射击时的弹道诸元计算式，我们再进一步分析空中射击的情况。空中射击时，在发射点上有高度H，这里的大气不是地面的标准值，气重函数$H(H) \approx H(0)$，$a_H \approx a_{0N}$。对于空中射击弹道的求解，可以在前述基础上作某些参数的变换，称为“郎日文”变换，即能解决。“郎日文”变换是地面炮兵为解决发射点气象条件为非标准值τ_{0N}, h_{ON}时，经变换后仍能应用在标准气象条件下求得的弹道表，来求解弹道的方法。在第一篇中我们已知大气随高度的变化，在服从标准定律分布时可分为三段，为了讨论方便，把它近似分为二段，如图 4-14 所示。

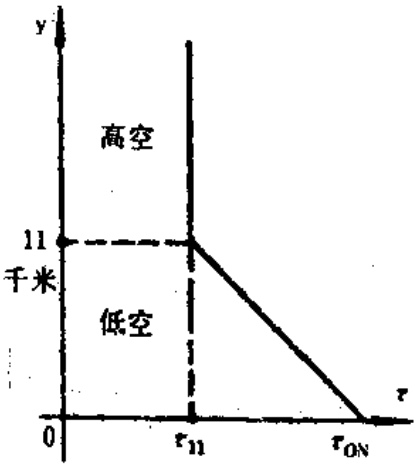


图 4-14 虚温τ随高度y变化的近似处理图

即认为当$H \leqslant 11000$米时为高空段，这一段的气温，按标准规律呈线性减少，$\tau = \tau_0 - Gy$。因此，空中射击时发射点的气象参数也与地面炮在非标准气象时的情况一样，用郎日文变化可以解决。

三、在低空段（H≤11000 米）射击时的近似求解

在低空段射击时，(4-58)式改变为如下形式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dV}{d\xi} = -CH_\tau(H + \xi\sin\varepsilon)\cdot G(V_\tau) - \frac{g\sin\varepsilon}{V}, && ① \\ &\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{-g}{V^2}\cos\varepsilon(1 - \varphi\operatorname{tg}\varepsilon), && ② \\ &\frac{d\zeta}{d\xi} = \varphi, && ③ \\ &\frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{V} && ④ \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}65)$$

式中：
$$H_\tau(H + \xi\sin\varepsilon) = H_\tau(y) = \frac{\gamma}{\gamma_{0N}}\cdot\sqrt{\frac{\tau}{\tau_{0N}}}$$

$$= \frac{\tau_{0N}}{\tau}\cdot\frac{h}{h_{0N}}\sqrt{\frac{\tau}{\tau_{0N}}} = \frac{h}{h_{0N}}\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}。（参阅第一章大气知识一节）。$$

乘入$\frac{h_H}{h_H}\sqrt{\frac{\tau_H}{\tau_H}}$后重新组合，并作变量变换，令 $C^* = C\frac{h_H}{h_{0N}}$，$H^*_\tau(\xi\cdot\sin\varepsilon) = \frac{h}{h_H}\sqrt{\frac{\tau_H}{\tau}}$ 。

则$H^*_\tau(\xi\cdot\sin\varepsilon)$是以射击点高度$H$为起点的比重函数。（以注脚$H$表示射击点的高度处的气象参数）。

(6-65)①式变为：

$$\frac{dV}{d\xi} = -C\frac{h}{h_{0N}}\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}\cdot\frac{h_H}{h_H}\sqrt{\frac{\tau_H}{\tau_H}}\cdot G(V_\tau) - \frac{g\cdot\sin\varepsilon}{V}$$

$$= -C\frac{h_H}{h_{0N}}\frac{h}{h_H}\cdot\sqrt{\frac{\tau_H}{\tau}}\cdot\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}}\cdot G(V_\tau) - \frac{g\sin\varepsilon}{V}$$

$$= -C^*\cdot H_\tau^*(\xi\sin\varepsilon)\cdot\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}}\cdot G(V_\tau) - \frac{g\sin\varepsilon}{V} \quad 。$$

再用变量置换法，把上式变换成与前节相似的式子。

令 $\xi^* = \xi\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}$，$V^* = V\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}}$，$t^* = t\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}}$ 。

则有 $\frac{dV^*}{d\xi^*} = \left(\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}}\Big/\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}\right)\cdot\frac{dV}{d\xi} = \sqrt{\frac{\tau_H}{\tau_{0N}}}\cdot\frac{dV}{d\xi}$ 。

即 $$\frac{dV^*}{d\xi^*} = \sqrt{\frac{\tau_H}{\tau_{0N}}}\left[-C^*\cdot H_\tau^*(\xi\sin\varepsilon)\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}}\cdot G(V_\tau) - \frac{g\sin\varepsilon}{V^*}\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}}\right] \tag{4-66}$$

上式中 $G(V_\tau)$ 可近似等于 $G(V^*)$，因为

$$V_\tau = V\cdot\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}} = V\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}}\sqrt{\frac{\tau_H}{\tau}} = V^*\cdot\sqrt{\frac{\tau_H}{\tau}}$$

而 $\tau_H \approx \tau$，这是因为弹道高 ξ 不太大，又因为空射弹丸多在超音速 2 倍以上飞行，这时阻力系数 C_{x0} 随 M 的变化缓慢，$G(V_\tau)$ 随 V_τ 的变化不显著，如图 4-15 所示。故可认为 $V_\tau \doteq V^*$，$G(V_\tau) \doteq G(V^*)$。

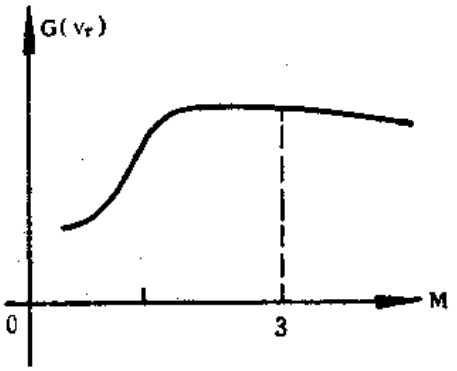


图 4-15 阻力函数随 M 数的变化图

还可以证明 $H_\tau^*(\xi\cdot\sin\varepsilon) = H_\tau(\xi^*\sin\varepsilon)$；

在空中射击时，弹道上某一点的温度为

$\tau = \tau_{0N} - G(H + \xi\sin\varepsilon) = \tau_{0N} - GH - G\xi\sin\varepsilon$

$= \tau_H - G\xi\sin\varepsilon$。这里的 G 为温度梯度。

故 $$\frac{\tau}{\tau_H} = 1 - G\frac{1}{\tau_H}\xi\sin\varepsilon = 1 - \frac{G}{\tau_{0N}}\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}\xi\sin\varepsilon \quad 。$$

或 $$\frac{\tau}{\tau_H} = 1 - \frac{G}{\tau_{0N}}\xi^*\sin\varepsilon = f(\xi^*\sin\varepsilon) \quad 。 \tag{4-67}$$

而地面射击时，道弹上某一点的温度为：

$$\tau = \tau_{0N} - G\xi\sin\varepsilon \quad 。$$

则 $$\frac{\tau}{\tau_{0N}} = 1 - \frac{G}{\tau_{0N}}\cdot\xi\sin\varepsilon = f(\xi\sin\varepsilon) \quad 。 \tag{4-68}$$

(4-67)与(4-68)两式的 f 函数形式完全一样，都表示弹道上某一点与射击点的温度比。而前面令

$$H_\tau^*(\xi\sin\varepsilon) = \frac{h}{h_H}\sqrt{\frac{\tau_H}{\tau}}$$

为弹道上某一点相对于发射点的空气比重函数。气压 h 用大气铅直平衡方程式的关系代入

得 $$H_\tau^*(\xi\sin\varepsilon)=\sqrt{\frac{\tau_H}{\tau}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{R}\int_0^{\xi\sin\varepsilon}\frac{d(\xi\sin\varepsilon)}{\tau}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{\tau_H}{\tau}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{R\tau_{0N}}\cdot\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}\int_0^{\xi\sin\varepsilon}\frac{d(\xi\sin\varepsilon)}{\tau/\tau_H}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{\tau_H}{\tau}}\exp\left\{-\frac{1}{R\tau_{0N}}\int_0^{\xi^*\sin\varepsilon}\frac{d(\xi^*\sin\varepsilon)}{\tau/\tau_H}\right\}。$$

上式中注意到 $\xi^*=\xi\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}$。将(4-67)式代入得

$$H_\tau^*(\xi\cdot\sin\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{f(\xi^*\sin\varepsilon)}}\exp\left\{-\frac{1}{R\tau_{0N}}\int_0^{\xi^*\sin\varepsilon}\frac{d(\xi^*\sin\varepsilon)}{f(\xi^*\sin\varepsilon)}\right\}。\quad(4\text{-}69)$$

而 $$H_\tau(\xi\cdot\sin\varepsilon)=\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}\frac{h}{h_{0N}}=\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}\exp\left\{-\frac{1}{R}\int_0^{\xi\sin\varepsilon}\frac{d(\xi\sin\varepsilon)}{\tau}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{R\tau_{0N}}\int\frac{d(\xi\sin\varepsilon)}{\tau/\tau_{0N}}\right\}。$$

将(4-68)式代入上式得

$$H_\tau(\xi\cdot\sin\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{f(\xi\cdot\sin\varepsilon)}}\exp\left\{-\frac{1}{R\tau_{0N}}\int_0^{\xi\sin\varepsilon}\frac{d(\xi\sin\varepsilon)}{f(\xi\sin\varepsilon)}\right\}。\quad(4\text{-}70)$$

(4-70)式与(4-69)式相比较，结构形式全完相同。如将(4-70)式的 ξ 全换为ξ^*，则得

$$H_\tau(\xi^*\sin\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{f(\xi^*\sin\varepsilon)}}\exp\left\{-\frac{1}{R\tau_{0N}}\int_0^{\xi^*\sin\varepsilon}\frac{d(\xi^*\sin\varepsilon)}{f(\xi^*\sin\varepsilon)}\right\}。\quad(4\text{-}71)$$

(4-71)式与(4-69)式完全相同，故有

$$H_\tau^*(\xi\sin\varepsilon)=H_\tau(\xi^*\sin\varepsilon)。$$

将上述关系式代入(4-66)式并经整理后，得

$$\frac{dV^*}{d\xi^*}=-C^*\cdot H_\tau(\xi^*\sin\varepsilon)\cdot G(V^*)-\frac{g\cdot\sin\varepsilon}{V^*}。\quad(4\text{-}72)$$

上式与(4-58)①式相比较，形成完全相似。

同理，用同样的变量置换法将(4-58)式其余方程式变为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\xi^*}&=-\frac{g}{V^{*2}}\cos\varepsilon(1-\varphi\cdot\mathrm{tg}\varepsilon),\\ \frac{dt^*}{d\xi^*}&=\frac{1}{V^*},\\ \frac{d\zeta^*}{d\xi^*}&=\varphi。\end{aligned}\right\}\quad(4\text{-}73)$$

(4-73)式同(4-58)式②、③、④相比较，形式完全相似。

故可仿照地面射击时相同的方法解得低空射击时的弹道参数式：形式与(4-64)式完全相似。

$$\left.\begin{aligned}
&V^* = V_{01}^* \cdot F_V(C^*D^*, V_{01}^*, \phi^*), && ①\\
&V_{PJ}^* = V_{01}^* \cdot F_{VPJ}(C^*D^*, V_{01}^*, \phi^*), && ②\\
&\alpha = \frac{gD^*}{2V_{01}^{*2}} \cdot \cos\varepsilon \cdot F_\alpha(C^*D^*, V_{01}^*, \phi^*), && ③\\
&T^* = \frac{D^*}{V_{01}^*} \cdot F_t(C^*D^*, V_{01}^*, \phi^*), && ④\\
&\varphi = \left(\alpha - \frac{1}{\mathrm{tg}\varepsilon}\right) \cdot F_\varphi(C^*D^*, V_{01}^*, \phi^*) + \frac{1}{\mathrm{tg}\varepsilon}。 && ⑤
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}74)$$

(4-74)式中的变量为置换后的变量，它们是：

$$V^* = V\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}},\ V_{01}^* = V_{01}\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}},\ C^* = C\frac{h_H}{h_{0N}},\ \xi^* = \xi\frac{\tau_{0N}}{\tau_H},$$

$$D^* = D\frac{\tau_{0N}}{\tau_H},\quad \phi^* = \frac{\sin\varepsilon}{C^*},\quad V_{PJ}^* = V_{PJ}\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}},\quad t^* = t\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}},$$

$$\zeta^* = \zeta\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}。$$

故：$$C^*\xi^* = C\frac{h_H}{h_{0N}} \cdot \xi\frac{\tau_{0N}}{\tau_H} = C \cdot \xi \cdot H(H) = C_H\xi,\ \text{同理}\ C^*D^* = C_HD。$$

将上述变量代回(4-74)式，得低空射击时的弹道参数

$$\left.\begin{aligned}
&V = V_{01} \cdot F_V(C_HD, V_{01}^*, \phi^*),\\
&V_{PJ} = V_{01} \cdot F_{VPJ}(C_HD, V_{01}^*, \phi^*),\\
&\alpha = \frac{gD}{2V_{01}^2} \cdot \cos\varepsilon \cdot F_\alpha(C_HD, V_{01}^*, \phi^*),\\
&T = \frac{D}{V_{01}} \cdot F_t(C_HD, V_{01}^*, \phi^*),\\
&\varphi = \left(\alpha - \frac{1}{\mathrm{tg}\varepsilon}\right) \cdot F_\varphi(C_HD, V_{01}^*, \phi^*) + \frac{1}{\mathrm{tg}\varepsilon}。
\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}75)$$

上式也适用于空中对地面射击时用，这时 ε 角以负值（$-\varepsilon$）代入，在(4-75)式的几个方程中，ϕ^* 中需以($-\varepsilon$)值代入，另一方面诸弹道函数 $F(CD, V_{01}^*, \phi^*)$ 在 $+\varepsilon$ 及($-\varepsilon$)时是有差异的，应分别列出 $+\varepsilon$ 及（$-\varepsilon$）时的弹道函数表。

四、在高空段（H>11000 米）射击时的近似求解

高空段射击时，温度变化规律与低空段不同，因此，对弹道的影响也就不同。在高空段，大气温度 τ 不变，保持 $\tau = \tau_{11}$（下标 11 表示 11 千米高度，下同），因此前面所得的诸弹道函数 F，必须重新修订。

由 $H_\tau(H+\xi\sin\varepsilon)$的定义知

$$H_\tau(H+\xi\sin\varepsilon)=\sqrt{\frac{\tau}{\tau_{0N}}}\cdot\frac{h}{h_{0N}}\cdot\frac{\tau_{0N}}{\tau}=\frac{h}{h_{0N}}\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}}\ 。$$

而 $$G(V_\tau)=G\left(V\cdot\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}\right)=G\left(V\cdot\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}}\right),$$

故(4-65)①式

$$\frac{dV}{d\xi}=-CH_\tau(H+\xi\sin\varepsilon)\cdot G(V_\tau)-\frac{g\sin\varepsilon}{V},$$

变为 $$\frac{dV}{d\xi}=-C\frac{h}{h_{0N}}\cdot\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}}\cdot G\left(V\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}}\right)-\frac{g\sin\varepsilon}{V}\ 。$$

同理，也取变量置换，令 $C^*=C\frac{h_{11}}{h_{0N}}$，　$t^*=t\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}}$，　$\xi^*=\xi\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}$，

$$\xi^*=\xi\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}，\quad \phi^*=\frac{\sin\varepsilon}{C^*}，\quad V^*=V\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}}\ 。$$

而 $H^*_{高}(\xi\sin\varepsilon)=\frac{h}{h_{11}}\cdot\sqrt{\frac{\tau_{11}}{\tau}}=\frac{h}{h_{11}}$为弹道上某点对 $H\approx11$ 千米处的空气相对比重。

则

$$\frac{dV^*}{d\xi^*}=\frac{\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}}}{\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}}\frac{dV}{d\xi}=\sqrt{\frac{\tau_{11}}{\tau_{0N}}}\frac{dV}{d\xi}$$

$$=\sqrt{\frac{\tau_{11}}{\tau_{0N}}}\left[-C\frac{h}{h_{0N}}\cdot\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}}\cdot G\left(V\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}}\right)-\frac{g\sin\varepsilon}{V}\right]$$

$$=-C\frac{h_{11}}{h_{0N}}\frac{h}{h_{11}}\cdot G\left(V\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}}\right)-\frac{g\sin\varepsilon}{V}\cdot\sqrt{\frac{\tau_{11}}{\tau_{0N}}}$$

$$=-C^*\cdot H^*_{高}(\xi\sin\varepsilon)\cdot G(V^*)-\frac{g\cdot\sin\varepsilon}{V^*}\ 。$$

同前节一样，可证明 $H^*_{高}(\xi\sin\varepsilon)=H_{高}(\xi^*\sin\varepsilon)$，

故 $$\frac{dV^*}{d\xi^*}=-C^*H_{高}(\xi^*\sin\varepsilon)G(V^*)-g\sin\varepsilon/V^*\ 。 \qquad (4\text{-}76)$$

取同样的变量置换，将(4-65)其余 3 式变为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\xi^*}&=-\frac{g}{V^{*2}}\cos\varepsilon(1-\varphi\operatorname{tg}\varepsilon),\\ \frac{dt^*}{d\xi^*}&=\frac{1}{V^*},\\ \frac{d\xi^*}{d\xi^*}&=\varphi\ 。\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}77)$$

(4-76)及(4-77)式与(4-58)式的结构形式完全相似。

仿照前节的方法可求得高空段（$H>11000$ 米）的弹道诸元公式如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&V = V_{01}\cdot F_{V高}(C_HD, V_{01}^*, \phi^*),\\
&V_{PJ} = V_{01}\cdot F_{VPJ高}(C_HD, V_{01}^*, \phi^*),\\
&\alpha = \frac{gD}{2V_{01}^2}\cdot\cos\varepsilon\cdot F_{\alpha高}(C_HD, V_{01}^*, \phi^*),\\
&T = \frac{D}{V_{01}}\cdot F_{t高}(C_HD, V_{01}^*, \phi^*),\\
&\varphi = \left(\alpha - \frac{1}{\mathrm{tg}\varepsilon}\right)F_{\varphi高}(C_HD, V_{01}^*, \phi^*) + \frac{1}{\mathrm{tg}\varepsilon},\\
&V_{01}^* = V_{01}\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}},\quad \phi^* = \frac{\sin\varepsilon}{C^*},\quad C^* = C\frac{h_{11}}{h_{0N}}\ 。
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}78)
$$

高空段与低空段的弹道诸元计算公式，形式相似，但它们的变量有差别，弹道函数$F(C_HD, V_{01}^*, \phi^*)$也不相同，使用时要注意到它们的差别，不可互乱套用。

在本节内容中我们讨论了直角小抬高角射击弹道的近似解法，它适用于D较大（5000米以内），ε较大($\varepsilon>30°$)的射击条件，具有较好的精度。而在§ 1中讨论了斜角坐标系射击弹道的近似解法，它适用于射程不太大（$D<2000$米），ε 较小（$\varepsilon\leqslant 30°$）的射击条件，此时也具有较好的精度，如超出此条件，则其计算精度将降低。

下面将此两种近似解法与较精确的数值积分法，在某一定的射击条件下所得的结果，列表比较，可看出，当ε较大、D较大时，用三头标函数（即本节方法）所得结果较为准确。

射击条件$C = 2$，$\alpha \approx 5°$，$V_{01} = 1000$

表 4-1

方法	数值积分法		简化斜角坐标系法				简化直角小抬高角坐标系法			
ε^*	D	t	D	$\delta D\%$	t	$\delta t\%$	D	$\delta D\%$	t	$\delta t\%$
0	3282	9.14	3292	0.30	9.17	0.33	3292	0.30	9.17	0.33
45	3755	12.00	3809	1.5	12.46	4.7	3746	−0.24	11.75	−0.42
−45	3876	11.65	3809	−1.7	12.46	7.0	3880	0.10	11.67	0.17

§4 斜角坐标系射击弹道的直接解析式求解

一、引言

在§ 1节中，所讨论的斜角坐标系近似解法，求解过程中把某些积分值令为弹道函数，把弹道函数事先计算好，并编制成表格备查。求解弹道诸元时，需要查阅弹道函数表$g(C_HD, V_{01})$或$K(C_HD, V_{01})$，有时查表中还要进行插值计算。所以这种求解方法并不十分方便。

能否不用弹道函数表，用简单的而又具有一定精度的解析式直接计算弹着点诸元呢？下面讨论近似求解射击弹道的斜角坐标系直接解析式法。简称“直接解析式法”。

二、基本思路

本方法的基本思路与本章§1斜角坐标系近似解法大致相似。即射程不太大($D<2000$)，目标高低角不太大($\varepsilon\leqslant 30^\circ$)的条件下，弹道比较平直。因此，可以似近代替而得到近似的质心运动微分方程组。(参阅本章§1一、二)。但将阻力函数$G(V)$另行理处，因此，积分求解过程中，不必计算弹道函数$g(C_HD,V_{01})$，从而可以直接得到无弹道函数的解析式。

由(4-1)式斜角坐标系弹丸质心运动方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dU}{d\xi}=-CH_\tau(y)G(V_\tau)=-CH(y)\cdot G(V,a),\\
&\frac{dP}{d\xi}=\frac{g}{U^2},\\
&\frac{dt}{d\xi}=\frac{1}{U},\\
&\frac{d\eta}{d\xi}=P,\\
&y=H+\xi\cdot\sin\theta_{01}-\eta,\\
&\overline{V}=\overline{U}+\overline{W}\ 。
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}79)$$

初始条件：　$\xi=0$，$t=0$，$\eta=0$，$U=V_{01}$，$P=0$ 。

经过假设简化之后，以V代U、以H代y、以a_{0N}代a、以D代ξ，并认为$\cos\varepsilon\doteq\cos(\varepsilon+\alpha)$之后，得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dC_HD}=-G(V),\\
&\frac{dP}{dC_HD}=\frac{g}{C_HV^2},\\
&\frac{d\eta}{dC_HD}=\frac{P}{C_H},\\
&\frac{dt}{dC_HD}=\frac{1}{C_HV}\ 。
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}80)$$

初始条件　$C_HD=0$，$t=0$，$\eta=0$，$P=0$，$V=V_{01}$ 。

上式参阅(4-3)式 。

三、对G(V)函数的处理

由定义知

$$G(V)=4.737\times10^{-4}\times V\times C_{\overline{x}_0}\left(\frac{V}{a}\right)\qquad(4.81)$$

式中，$C_{\overline{x}_0}\left(\frac{V}{a}\right)$—为所选用的标准定律的标准阻力系数。当以$a_{0N}$代替$a$时，

$$C_{\overline{x}_0}\left(\frac{V}{a}\right)=C_{\overline{x}_0}\left(\frac{V}{a_{0N}}\right)\approx C_{\overline{x}_0}(M)$$

观察航空射击弹道，在目前空战条件下、载机空速 V_1 多在近音速飞行（也会在超音速以上飞行），V_{01} 起码在 $M=3\sim3.5$（或更多），在 2000 米射程以内，命中目标时，弹丸的遇速 $M=1.3$ 以上，在这个 M 数范围内，阻力系数 $C_{\bar{x}0}(M)$ 是缓慢减少的趋势，如图 4-16 所示。

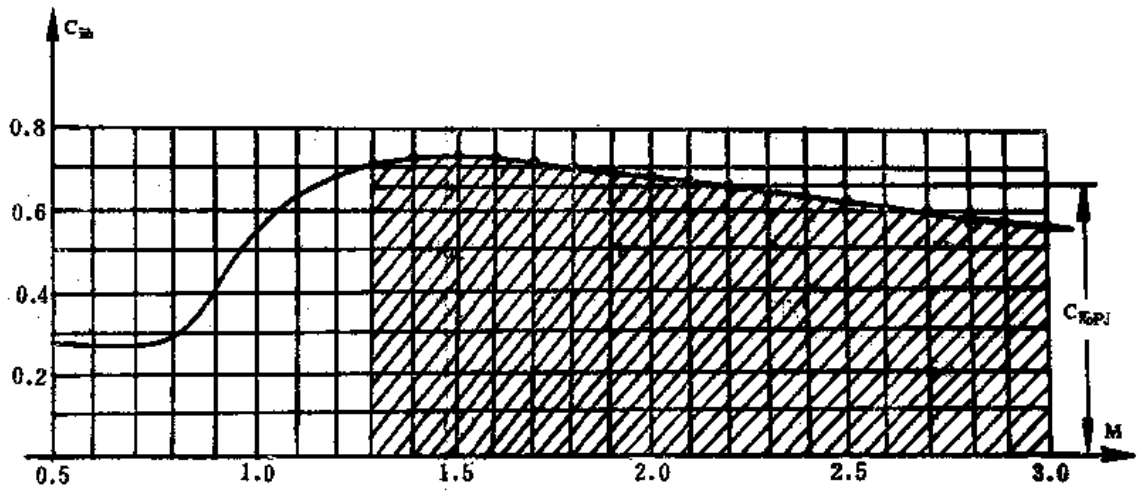


图 4-16　阻力系数 $C_{\bar{x}0}$ 的近似处理图

可以把阻力系数似处理为一次函数式，在上述圈范内，处理成 $C_{\bar{x}0}=A-B'M$ 的代数式，式中 A 为起始值，B' 为 $C_{\bar{x}0}(M)$ 曲线的平均斜率。而 $M\doteq\frac{V}{a_{0N}}$，a_{0N} 为地面标准音速值，是个常数。令 $\frac{B'}{a_{0N}}=B$，则在 M 数常用范围内有

$$C_{\bar{x}0}(M)=A-BV \quad 。$$

也可以把 M 数常用范围内的阻力系数 $C_{\bar{x}0}(M)$ 处理成平均值 $C_{\bar{x}0PJ}$。因为在这个范围内，$C_{\bar{x}0}(M)$ 的变化幅度不大。

据此，下面采用取 $C_{\bar{x}0PJ}$ 的方法，对质心运动微分方程式作求解。

对于以后新选用或新设计的弹丸，则可以撇开标准阻力定律的标准阻力系数，以新弹丸本身的 $C_{\bar{x}0}(M)$ 曲线求平均值 $C_{\bar{x}0PJ}$（这时弹道系数 C 中应取弹形系数 $i=1$ 代入）。

求取 $C_{\bar{x}0PJ}$ 时，M 初始值 $M_{初}$ 和末值 $M_{末}$ 的选取，应据根空战时飞机的空速 V_1 和弹丸炮口速度 V_0、以及常用作战距离 D 合理选取。也就是说，不同飞机装备不同航炮，在 $D<2000$ 米时，应选用不同的 $M_{初}$ 和 $M_{末}$，因而有不同的 $C_{\bar{x}0PJ}$ 值。例如近音速飞行的飞机 M 数为 0.9，装备有 23-2 航炮，则 $V_{01}=0.9\times340+700=1006$ 米/秒，$M_{初}=1006\div340=2.96$ 。

在 $D<2000$ 米时，中空作战 $H=4000$ 米，$H(H)=0.668$，则

$$V_{末}=V_{01}\cdot g_u(C_BD,V_{01})=1006\times g_u(1.67\times0.668\times2000,1006)$$
$$=1006\times0.4928=496\text{ 米/秒},$$

故　　$M_{末}=496\div340=1.45$，

取 $M_{初}=3.0$，$M_{末}=1.5$。在西亚切阻力系数中，用数值积分法或图解积分法，可求得 $C_{\bar{x}0PJ}=0.659$（$1.5\leqslant M\leqslant3.0$）。见图 4-16 所示。

下面对空战飞机用不同空速，选用不同航炮的各种组合，在 $D<2000$ 米，中空射击时

所选用的 $M_{初}$、$M_{末}$ 和 $C_{\bar{x}_{0PJ}}$ 值，经计算后，列于表 4-2 。

表 4-2

飞机空速		航炮 V_0	V_{01}	$M_{初}$	$V_{末}$	$M_{末}$	$C_{\bar{x}_{0PJ}}$
M	V_1						
0.9	306	700	1006	3.00	496	1.50	0.659
0.9	306	800	1106	3.30	509	1.50	0.639
0.9	306	900	1206	3.60	527	1.60	0.615
1.5	510	700	1210	3.60	528	1.60	0.615
1.5	510	800	1310	4.00	546	1.60	0.591
1.5	510	900	1410	4.20	565	1.70	0.575
2.0	680	700	1380	4.10	560	1.70	0.580
2.0	680	800	1480	4.30	578	1.70	0.569
2.0	680	900	1580	4.60	596	1.80	0.548

将 $C_{\bar{x}_{0PJ}}$ 代入(4-81)式得

$$G(V)=4.737\times10^{-4}\cdot V\cdot C_{\bar{x}_{0PJ}}=k\cdot V \quad 。$$

当弹丸一定时，C为已知，把C与$G(V)$合并一起得：

$$CG(V)=C\cdot4.737\times10^{-4}\times C_{\bar{x}_{0PJ}}\times V=KV \quad 。$$

式中：$K=4.737\times10^{-4}\cdot C\cdot C_{\bar{x}_{0PJ}}$

$C=\dfrac{id^2}{q}\times10^3$ 为弹道系数

$i=\dfrac{C_{\bar{x}_0}(M)}{C_{\bar{x}_0}(M)}$ 为弹形系数。（若取某弹丸自身的阻力系数 $C_{\bar{x}_{0PJ}}$，则 $i=1$）。

将上述值代入(4-80)式中，并取 $H(H)\cdot D$ 为自变量，记为 HD，(H为比重函数)，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV}{dHD}&=-KV \quad ①\\ \frac{dP}{dHD}&=\frac{g}{HV^2} \quad ②\\ \frac{d\eta}{dHD}&=\frac{P}{H} \quad ③\\ \frac{dt}{dHD}&=\frac{1}{HV} \quad ④\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}82)$$

初始条件：当 $HD=0$ 时，$V=V_{01}$，$P=0$，$\eta=0$，$t=0$ 。

四、方程组的积分求解

经上述处理之后，方程组可以自上而下单独积分求解。

1. 对(4-82)①式积分，并代入初条件，得

$$\int_{V_{01}}^{V}\frac{dV}{V}=\int_{0}^{HD}-KdHD,$$

得 $$L_n\frac{V}{V_{01}}=-KHD\ 。$$

即 $V=V_{01}\cdot e^{-KHD}$ 为目标点的速度，

2. 积分(4-82)②式，将V值及初始条件代入，得

$$\int_0^P dP=\int_0^{HD}\frac{g}{HV_{01}^2\cdot e^{-2KHD}}dHD=\frac{g}{HV_{01}^2}\int_0^{HD}e^{2KHD}d(HD),$$

即： $$P=\frac{g}{HV_{01}^2}\cdot\frac{1}{2K}(e^{2KHD}-1)\ 。$$

3. 积分(4-82)③式，将P及初始条件入代，得

$$\int_0^{\eta}d\eta=\int_0^{HD}\frac{g}{H^2V_{01}^2 2K}(e^{2KHD}-1)dHD,$$

即 $$\eta=\frac{g}{H^2V_{01}^2 2K}\left[\int_0^{HD}e^{2KHD}d(HD)-\int_0^{HD}dHD\right]$$

$$=\frac{g}{2KH^2V_{01}^2}\left[\frac{1}{2K}(e^{2KHD}-1)-HD\right]$$

$$=\frac{P}{2KH}-\frac{gD}{2KHV_{01}^2}\ 。$$

4. 求抬高角α

$$\alpha=\frac{\eta}{D}\cdot\cos\varepsilon=\frac{g}{2KH^2V_{01}^2D}\left[\frac{1}{2K}(e^{2KHD}-1)-HD\right]\cos\varepsilon\ 。$$

5. 积分(4-82)④式，将V值及初始条件代入，得

$$\int_0^t dt=\int_0^{HD}\frac{e^{KHD}}{HV_{01}}dHD=\frac{1}{H\cdot V_{01}}\int_0^{HD}e^{KHD}d(HD),$$

即 $$t=\frac{1}{HV_{01}K}(e^{KHD}-1)\ 。$$

6. 求 V_{PJ}

$$V_{PJ}=\frac{D}{t}=\frac{HDKV_{01}}{e^{KHD}-1}\ 。$$

综合上述，可得目标点弹道诸元计算式为

$$\left.\begin{aligned}V&=V_{01}\cdot e^{-KHD},\\P&=\frac{g}{2KHV_{01}^2}(e^{2KHD}-1),\\\eta&=\frac{P}{2KH}-\frac{gD}{2KHV_{01}^2},\\\alpha&=\frac{\eta}{D}\cos\varepsilon,\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}83)$$

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{KHV_{01}}(e^{KHD}-1), \\ V_{pj} &= \frac{D}{t} = \frac{KHDV_{01}}{e^{KHD}-1}。 \end{aligned}\right\}$$

式中：$K = 4.737\times10^{-4}\times C\times C_{\overline{V}_{0PJ}}$；$H = H(H)$ 为射击点比重函数；D 为射击距离。

采用上式在已知射击初始条件时，计算弹道诸元，可以省去编、印、查弹道表的工作量，十分方便。

五、级数形式的直接解析式

使用指数形式的解析式，在火控计算机上使用不甚方便，可以将指数式展开成级数式，取前 n 项。使其计算精度在给定范围内。n 数的大小，可根据指数 KHD（或 $2KHD$）的大小用电子计算机算得。

由
$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$e^{-x} = 1\Big/\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = 1/(a_0 + a_2 + \cdots + a_n)。$$

上式中 x 代表 KHD（或 $2KHD$）。

当第 n 项与前 n 项之和的相对量小于等于所给精度时

即
$$\frac{x^n}{n!}\Big/\left(1 + \sum_{1}^{n}\frac{x^n}{n!}\right) \leqslant \varepsilon,$$

及
$$|((1/s_{-1}) - (1/s))/(1/s)| \leqslant \varepsilon$$

时，取级数的前 n 项之和为 e^{x}（或 e^{-x}）的值。

式中：ε —为所给定的精度，可取 $\varepsilon = 0.01$（或更小）

s —为级数的前 n 项之和，s_{-1} 为级数前 $n-1$ 项之和。

根据 x 值计算，所得的项数 n 值如表4-3所示：

表 4-3①

x	⩽0.1	⩽0.3	⩽0.7	⩽1.3	⩽1.9	⩽2.5	⩽3.1	⩽3.7	⩽4.3
e^{x}	1.1052	1.3498	2.0137	3.669	6.685	12.182	22.198	40.447	73.699
$1+\sum_{1}^{n}\frac{x^n}{n!}$	1.105	1.3445	2.0121	3.661	6.662	12.130	22.094	40.251	73.344
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
相对误差	0.0045	0.003	0.005	0.0084	0.0098	0.0099	0.0095	0.0089	0.0081
x	⩽0.1	⩽0.3	⩽0.7	⩽1.3	⩽1.9	⩽2.3	⩽3.1	⩽3.7	⩽4.3
e^{-x}	.9048	.7408	.4966	.2725	.1496	.1003	.04505	.02472	.01357
$1\Big/\left(1+\sum_{1}^{n}\frac{x^n}{n!}\right)$	.9049	.7410	.4969	.2731	.1500	.1005	.04526	.02484	.01363
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
相对误差	.0045	.0033	.0049	.0085	.0099	.0068	.0047	.0089	.0081

① 表中各值均以 x 取上限时计算所得。

最后得级数形式的解析式。

$$\left.\begin{aligned}
&V=V_{01}\left[1\Big/\left(1+KHD+\frac{(KHD)^2}{2!}+\frac{(KHD)^3}{3!}+\cdots+\frac{(KHD)^n}{n!}\right)\right],\\
&P=\frac{g}{2KHV_{01}^2}\left[2KHD+\frac{(2KHD)^2}{2!}+\frac{(2KHD)^3}{3!}+\cdots+\frac{(2KHD)^n}{n!}\right],\\
&\eta=\frac{P}{2KH}-\frac{gD}{2KHV_{01}^2},\\
&\alpha=\frac{\eta}{D}\cos\varepsilon,\\
&t=\frac{1}{KHV_{01}}\left[KHD+\frac{(KHD)^2}{2!}+\frac{(KHD)^3}{3!}+\cdots+\frac{(KHD)^n}{n!}\right],\\
&V_{PJ}=\frac{D}{t}\ 。
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}84)$$

式中 n 值由 $x=KHD$（或 $2KHD$）确定，可由表(4-3)查得。

六、精度比较

直接解析式法与§ 1 节斜角坐标系近似解法（简称查表法）计算结果的比较，可看出两种方法的结果相差不大。

例 4-4 已知某飞机使用 23-1 航炮，弹丸初速 $V_{01}=1000$，目标距离 $D=1200$，射击点高度 $H=6000$，目标高低角 $\varepsilon=0°$，弹丸弹道系数 $C=1.67$。求目标点处的 V，P，η，α，t，V_{PJ}。（单位用公斤、米、秒制）。

解：①计算K值

$$K=C\times4.737\times10^{-4}\times C_{\overline{x}_{0PJ}}=1.67\times4.737\times10^{-4}\times0.659$$
$$=5.2132\times10^{-4}$$

②计算 KHD 值，

$$KHD=5.2132\times0.538\times1200\times10^{-4}=0.33656,$$

③计算 $V_{末}$

$$V_{末}=V_{01}\cdot e^{-KHD}=1000\times e^{-0.33656}=714.2\ 米/秒,$$

④计算P值

$$P=\frac{g}{2KHV_{01}^2}(e^{2KHD}-1)=\frac{9.8\times10^4}{2\times5.2132\times0.538\times1000^2}(e^{2\times0.33656}-1)$$
$$=0.016778,$$

⑤计算 η 值

$$\eta=\frac{P}{2KH}-\frac{gD}{2KHV_{01}^2}=\frac{0.016778}{2\times2.8047\times10^{-4}}-\frac{9.8\times1200}{2\times2.8047\times10^2}$$
$$=8.9,$$

⑥计算 α 值

$$\alpha=\frac{\eta}{D}\cos\varepsilon=\frac{8.9}{1200}\approx 0.007417\approx 0.425^\circ=25'29'',$$

⑦计算 t 值

$$t=\frac{1}{KHV_{01}}(e^{KHD}-1)=\frac{1}{2.8047\times 1000\times 10^{-4}}(e^{0.33656}-1)$$
$$=1.42,$$

⑧求 V_{PJ} 值

$$V_{PJ}=\frac{D}{t}=\frac{1200}{1.42}=845.1\ 。$$

将上述结果与§ 1节查表法相比较，（参阅§ 1节[例 2]，在与本例相同射击条件下所得的道弹诸元相比）如下表所示：

表 4-4

参量 / 值	V	P	η	α	t	V_{PJ}
直接解析式法	714.2	0.01678	8.90	0.425	1.42	845.1
查 g 函数表法	727	0.01629	8.74	0.417	1.411	853
相对误差 ε	−0.018	0.029	0.018	0.019	0.0063	−0.0093

§5 轰炸道弹的有关问题及近似求解

一、引言

从飞机上向敌人投掷持殊的弹丸（炸弹、鱼雷、水雷等）摧毁敌人的重要目标或兵员和术技装备，称为轰炸。轰炸的方法有水平轰炸、俯冲轰炸、下滑和上仰轰炸四种。

水平轰炸是飞机保持水平等速直线飞行条件下的投弹轰炸方式，这时的投弹初始参数容易测量，计算瞄准也较准确，（但飞机容易被敌炮火所伤害）。也可以保持等高度而作变速曲线飞行的条件下投弹轰炸。水平轰炸适用于各种气象条件、各种飞行速度、高度以及昼夜间对各种目标的轰炸。是轰炸机的主要作战方法，歼击机、强击机也可用水平轰炸方法对敌人作低空或超低空轰炸。

俯冲轰炸是飞机沿较大的下滑角作直线加速下滑飞行时对敌人的轰炸。适用于轻型飞机对敌人各种目标的轰炸，是强击机、歼击机常用的轰炸方式，下滑的角度称为俯冲角，常用 λ 表示。定义水平线与飞机纵轴 x_f 的夹角为 λ，水平线与飞机速度矢量 $\overrightarrow{V}$ 的夹角为 λ_a。

下滑轰炸是飞机沿较小的下滑角作直线等速下滑飞行时的轰炸，与俯冲轰炸相比，准确度较差，使用较少。

上仰轰炸是飞机在垂直平面内作不断的上升后仰转弯过程中的投弹轰炸，上仰轰炸能从低空或超低空隐蔽突然地进入目标实施轰炸，并迅速地上仰转弯脱离目标，是消灭敌人，保存自己的有效轰炸方法。也是强击机、歼击机投掷小型核炸弹的主要方法。

炸弹和炮弹丸以及火箭弹丸弹道的主要区别是初始速度较慢，因而弹道比较弯曲。因

此，一般都用直角坐标系质心运动微分方程组求解。上述四种轰炸方法的弹道诸元，由不同的初始条件和炸弹本身的阻力函数所确定。

轰炸弹道的求解，都是先假定空气在标准状态下，无风、自某高度、速度、俯冲角（或上仰角 $-\lambda_{\infty}$），投下某种类型的炸弹落至海平面时的情况下，计算得落点的弹道诸元。所谓无风，是指空气相对于地球是静止的，事实上环绕地球周围的大气相对于地球总是在不断地运动着，所以风总是存在的。在解弹道问题时，对风的处理有两种方法，第一种方法，认为风矢量为零，把风对弹着点的影响，留给轰炸瞄准原理中去解决，这是我国目前经常用采的方法。第二种方法是在建立弹丸运动微分方程组时直接考虑风对弹丸运动的影响，解出有风时的弹道诸元。这里我们仅讨论第一种方法的有关问题。当气象条件是非标准状态时，则在标准气象状态的基础上作必要的修正。下面讨论有关问题。

二、无风轰炸弹道图

以水平轰炸为例，先说明一下各参量的名称及其意义。如图 4-17 所示。从水平等速直线飞行的飞机上投下的炸弹具有水平初速 V_1，（即飞机的空速）。炸弹在离开飞机后，立即受到重力和阻力的作用，在水平方向上的速度分量越来越减少，在垂直方向上的速度，受重力加速度 g 和阻力加速度 J 的作用，作不等加速度运动，其垂直分速度逐渐增大，因此，弹道向下弯曲。O 点为投弹点，若投弹后飞机仍保持水平等速直线飞行，则炸弹落地瞬间，飞机飞达 E 点，炸弹则由于受空气阻力影响而落在 M 点，也就是目标点。显然炸弹在水平方向上比飞机落后了一段距离，这段距离称为退曳长△。EM 连线称退曳线，退曳线与铅垂线之间的夹角称退角曳 γ。

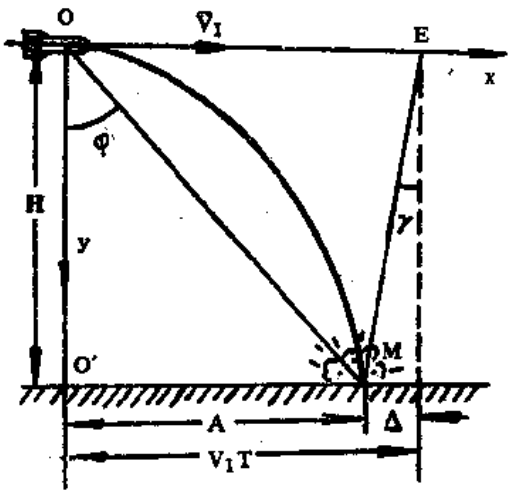


图 4-17 水平轰炸弹道诸元图

由投弹瞬间到炸弹落地所经时间，称为炸弹的落下时间 T。

投弹点 O 在地面的射影 O' 点到目标点 M 的水平距离称炸弹的无风水平射程 A（简称射程）。

炸弹落地瞬间的速度，称为末速 $V_{末}$，$V_{末}$ 矢量与水平线间的夹角，称落角 $\theta_{落}$。$V_{末}$ 及 $\theta_{落}$ 用于判断炸弹的侵彻力及跳弹与否。轰炸道弹诸元一般有 A，△，γ，T，$V_{末}$，$\theta_{落}$ 六个量。

而
$$\triangle = V_1T - A \tag{4-85}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\triangle}{H} \tag{4-86}$$

所以在求弹道诸元时，只要求出 A，T，$V_{末}$，$\theta_{落}$ 四个参量，即可由上两式求得 △ 和 γ，

在轰炸瞄准时，还要用到二个瞄准参量，这两个参量也可由已知参量求出，它们是

瞄准角 φ：定义投弹点 O 与目标点 M 的连线（也称瞄准线）与铅垂直线 OO' 之间的夹

角，为瞄准角φ，由图 4-17 可知：

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A}{H} = \frac{V_1 T - \triangle}{H} \tag{4-87}$$

超越角ψ：定义投弹瞬间飞机的纵轴方向x_f与瞄准线OM之间的夹角为超越角ψ。

对于水平轰炸有　　$\psi = 90° - \varphi + \alpha - \phi$，　　(4-88)

对于非水平轰炸有　　$\psi = 90° - \varphi - \lambda_\alpha + \alpha - \phi$。　　(4-89)

上式中，α为飞机攻角，ϕ为飞机翼弦安装角。

水平轰炸弹道全完取决于飞行高度H，投弹速度V_1和炸弹的外形、结构（即弹道系数C）。

故有：

$$A = A(C,H,V_1); \qquad \gamma = \gamma(C,H,V_1);$$
$$T = T(C,H,V_1); \qquad V_{末} = V(C,H,V_1);$$
$$\triangle = \triangle(C,H,V_1); \qquad \theta_{落} = \theta(C,H,V_1)。$$

可见它们是取决于C、H，V_1的三头标函数关系。

对于非水平轰炸来说，轰炸弹道完全取决于C，H，V_1和俯冲角（或上仰角）四个参量，是四头标的函数关系。（近似计算时，也可用λ代替λ_α）。

$$A = A(C,H,V_1,\lambda_\alpha); \qquad \gamma = \gamma(C,H,V_1,\lambda_\alpha);$$
$$T = T(C,H,V_1,\lambda_\alpha); \qquad V_{末} = V(C,H,V_1,\lambda_\alpha);$$
$$\triangle = \triangle(C,H,V_1,\lambda_\alpha); \qquad \theta_{落} = \theta(C,H,V_1,\lambda_\alpha)。$$

三、表征航空炸弹的弹道特征数

在第一篇讨论弹丸的阻力加速度时我们知道：

$$J = C \cdot H(y) V \cdot G(V,a)。$$

式中，$C = \frac{id^2}{q} \times 10^3$，称为弹道系数，它与弹丸的外形即弹形系数$i$有关，与炸弹的直径$d$、重量$q$有关。

阻力函数$G(V,a) = 4.737 \times 10^{-4} V \cdot G_{\overline{x}_0}(M)$，与速度$V$及标准阻力定律的阻力系数$C_{\overline{x}_0}(M)$有关。

用弹道系数C表征炸弹的弹道特性，就常和所选用的标准阻力定律有关。因此还必须介绍常用的准标阻力定律。

“平方阻力定律”：是一种以炮弹作为标准弹型，认为阻力随速度平方而变化，把阻力系数看作常数的定律。它只适用于弹丸在M数小于 0.7 以下时的低音速运动情况。

“西亚切阻力定律”：是意大利学者西亚切综合了不同类型炮弹丸的试验结果而制订的一种阻力定律。该阻力定律目前在我国地面炮兵和航空炮弹弹道计算中，得到广泛应用，对于计算炮弹丸弹道，较为准确。但因炸弹外型与炮弹丸略有差异，故用于计算炸弹弹道，精度较差。

“1950 年航空炸弹阻力定律”：是苏联空军 1950 年制订的计算航空炸弹弹道的定律，由它编制的 1952 年轰炸弹道表求解炸弹弹道，还是比较准确的。

“合成阻力定律”：它是综合了“平方阻力定律”和“西亚切定律”，在速度$V_1 \leqslant 218$米/秒（相当于$M = 0.7$左右）时用平方阻力定律；$V_1 > 218$米/秒时用西亚切定律。苏联的

1939 年轰炸弹道表，就是根据此定律编制的。

1968～1969 年，我国空军领领机关，组织有关科技人员，经过大量试验和调查研究，制订了适合我国情况的气象标准和炸弹标准定律，并编制成 1970 年轰炸弹道表。可称为“1969 年航弹标准阻力定律”。（简称 1969 年定律）。用此定律编成的 70 年弹道表求炸弹弹道诸元，比用 1950 年定律所得结果还要准确。

我们知道，在相同的投弹条件下，投下不同特征数的炸弹，它们受到的阻力是不相同的，因此落点的弹道诸元也不相同。炸弹的特征数可用弹道系数C、炸弹标准落下时间Θ或极限速度V_{JS}来表示。我国和苏联，习惯于用 C 和 Θ 来表示，欧美等西方国家则习惯于用 C和V_{JS}来表示。下面分别说明之。

1. 弹道系数C

C的定义与炮弹丸的弹道系数C相同，它是表征炸弹结构尺寸，重量和外形对空气阻力影响程度大小的量。C愈大，则弹道性能愈坏；反之，C愈小，则其弹道性能愈好。

弹道系数值可由公式$C=\frac{id^2}{q}\times 10^3$算出。式中，$i$为弹形系数；$d$为弹丸直径；$q$为弹丸重量。也可由试投实验求得。

对于选定不同的阻力定律来说，同一个炸弹的弹形系数i是不同的[$i=C_{\overline{x}_0}(M)/C_{\overline{x}_0}(M)$]，所以弹道系数$C$也不相同。目前我国的航弹，都统一选定“1969年定律”，航弹上及弹道表上所标称的C，即该定律的C。

2. 标准落下时间Θ

Θ也是表征炸弹弹道特性的量，也称为特征时间。它是轰炸弹道学发展过程中使用过的物理量并一直沿用至今。Θ的定义是：在标准气象条件下，从高度为2000米，以V_1为40米/秒水平等速直线飞行的飞机上投下的炸弹，落到海平面时所用的时间T，称为该炸弹的Θ。Θ愈小，则弹道性能愈好；反之，则愈差。尽管炸弹的大小和类型不相同，只要它们的Θ是相等的，则它们的弹道性能便是相同的。在相同的轰炸条件下，它们的落点弹道诸元便相同。在真空中所有炸弹的标准落下时间都相同，等于$\sqrt{\frac{2H}{g}}=20.197$秒。在空气中，所有炸弹的$\Theta$都大于 20.197 秒。一般航空炸弹的$\Theta$，在 20.30～25.00 之间（某些特种炸弹$\Theta$可能还要大）。

标准落下时间Θ，可由投弹试验测得，也可由质心运动微分方程组积分求得。根据水平轰炸时落下时间$T\approx T(C,H,V_1)$，及由Θ的定义知

$$\Theta=T(C,2000,40)\ 。\qquad (4\text{-}90)$$

炸弹的弹道系数C和标准落下时间Θ，都是表征弹道性能的特征数，是一个事物的两种不同表示方法。两者之间存在着密切的对应关系，可以互相换算。由(4-90)式可以看出两者之间的函数关系为

$$\Theta=T(C,2000,40)=f(C)\ 。\qquad (4\text{-}91)$$

当C和Θ的取值范围不大时，两者之间的关系，为近似的线性函数关系，表为

$$\Theta=20.197+bC\ 。\qquad (4\text{-}92)$$

式中，b为比例系数，对于不同的阻力定律（前面已说过），对同一个炸弹、弹道系数C是不相同的，因此，对于不同的阻力定律，系数b也是不相同的，例如：在Θ值为 20.30～

23.0秒时，对于“1969年定律”，$b=1.8645$。

而对于“合成阻力定律”，$b=0.809$。

标准落下时间Θ虽然是很早以前定义的物理量，尽管投弹速度很低，只有40米/秒，大大落后于现代飞机的投弹速度。但在2000米高度投弹时，保证了全弹道内炸弹速度仍在低音速范围内，这时的阻力系数$C_{x_0}(M)$变化不大，用质心运动微分方程组积分所得的Θ比较准确，能真实的代表炸弹的实际落下时间。所以标准落下时间Θ能更直观的表示炸弹的弹道特性，仍不失它的实用意义。

3. 炸弹的极限速度V_{JS}

当炸弹下落至靠近地面时，弹道接近于垂直地面，这时，若空气阻力加速度J与重力加速度g接近平衡时，炸弹的运动速度达到极限值。而空气阻力加速度J的大小则与炸弹的弹道性能有关。弹道性能好，J就小，V_{JS}就大。反之，弹道性能坏，J就大，V_{JS}就小。由$J=g$可求出极限速度V_{JS}的大小。

由$J=CH(y)F(V)$，当靠近地面时$H(y)\doteq 1$，故

$$J=C\cdot F(V_{JS})=g \text{ 。}$$

$$\therefore \quad F(V_{JS})=\frac{g}{C} \tag{4-93}$$

由上式$F(V_{JS})=4.74\times10^{-4}C_{\bar{x}_0}(V_{JS},a_{0N})\cdot V_{JS}^2$可求出$V_{JS}$来，所以$V_{JS}=f_1(C)$，也与$C$有函数关系，可以换算。

四、弹形系数i变化时和炸弹直径、重量不标准时，C、Θ的变化

由弹道系数$C=\frac{id^2}{q}\times10^3$，当$i$、$d$、$q$有变化时，会使$C$发生变化，因此$\Theta$也发生变化。

1. 弹道性能随投弹高度H和初速V_1的变化

在第一章我们讲到弹形系数i时，曾认为弹丸在整在个运动速度范围内，$i=C_{x_0}(M)/C_{\bar{x}_0}(M)$近似为某一常数。事实上，$i$不是常数，它随马赫数$M$的大小而改变，即$i=i(M)$。在解弹道问题时，为了求解的方便，取某一速度范围内的i的平均值作为常数，近似代替这一速度范围内随M数变化的i值进行计算。因此C中的i是与某一速度范围内的速度平均值相对应的。

当投弹高度和初速增大时，弹丸的平均运动速度也会增大，与平均速度相对应的i值也就会变化，因此弹道系数C和特征时间Θ也就相应地有了变化。（对于标准阻力定律所选用的炸弹，其弹形系数i恒等于1，故它的C及Θ不随i值而改变）。所以对于大于2000米高度、V_1为跨音速以上投弹时，同一种炸弹，其$C(\Theta)$值要加以修正。（V_1在亚音速以下投弹时，对$C(\Theta)$的影响不大）。

下面介绍Θ随H变化的修正方法。

我们知道，水平轰炸弹道表是由(Θ,H,V_1)三个参量编制的。为了使在投弹高度增加时，所投的炸弹，在水平轰炸弹道表上查出的弹道诸元与真实情况（指实弹投放测试所得结果）相符合。必需修改特征数Θ。

V_1在亚音速情况下，对于某一高度H和速度V_1，弹道表值取决于Θ值，因而表值

$$T_{表}=T_{表}(\Theta),\quad A_{表}=A_{表}(\Theta)\ 。 \tag{4-94}$$

而对于某种炸弹，其标准落下时间已被标定为 Θ，在相同的 V_1 条件下，其落点诸元的真实值取决于高度H，因此有实际值

$$T_{实}=T_{实}(H),\quad A_{实}=A_{实}(H)\ 。 \tag{4-95}$$

令查表的表值与真实值相等，就可以确定出这种炸弹在亚音速初速 V_1 及给定投弹高度H时应取的Θ值。

由(4-94)及(4-95)式知

$$T_{表}(\Theta)=T_{实}(H),\quad A_{表}(\Theta)=A_{实}(H)\ 。$$

故可知：在相同初速 V_1 条件下，根据 $T_{实}$ 在弹道表中查得 $T_{表}=T_{实}$ 时，对应得 Θ_T。同理查 $A_{表}$，使 $A_{表}=A_{实}$ 时，对应得 Θ_A。

所得的 Θ_T 及 Θ_A 值不会完全相等，将 Θ_T 和 Θ_A 取平均值，

令
$$\Theta^*=\frac{\Theta_T+\Theta_A}{2},$$

取 Θ^* 作为该种炸弹在所给投弹高度H时的修正值。

例如：使用某种 500 公斤爆破炸弹，从不同高度 H 投弹，使用 1970 年弹道表查解弹道落点诸元时，需改用下列标准落下时间。

（H公里）	＜5	5～7	7～9	9～11	11～12
Θ（秒）	21.12	21.17	21.21	21.27	21.32

在投弹初速 V_1 为跨音速以上时，对Θ的修正，也可仿照上述方法进行。

2. 炸弹的重量和直径不标准时，弹道性能的变化

当炸弹的重量和外形直径不是标称值时，弹道性能也要发生变化。假设炸弹的标称重量和标称直径为 $q_{标}$ 和 $d_{标}$ 。

则：
$$C=\frac{id^2_{标}}{q_{标}}\times 10^3,$$

而炸弹的重量和直径是非标准值时

则：
$$C^*=\frac{id^2_{实}}{q_{实}}\times 10^3\ 。$$

两者相除

得
$$C^*=C\frac{d^2_{实}q_{标}}{d^2_{标}q_{实}}\ 。 \tag{4-96}$$

式中，下标“实”字代表实际值，下标“标”字代表标称值。如果

已知某型炸弹的弹道系数为C，某颗炸弹的实际重量及实际尺寸与标称值不相等，可根据(4-96)式修正 C^*。因此，修正后的标准落下时间，便是 $\Theta^*=20.197+bC^*$。

五、气象条件不标准时，对轰炸弹道的影响及其修正

轰炸弹道表，是在假设气象条件为标准状况下（海平面的气温、气压为标准值，并按标准规律分布）；以某一初始条件(H,V_1,λ_a)投下某种炸弹(弹道系数为C)，落点在海平面上

的条件下，解质心运动微分方程组，求得落点诸元编制而成的表格。因此，只要知道初始条件(H,V_1,λ_a,C)就可从弹道表上查得落点诸元。但是，投炸弹时往往是气象条件不标准。例如，我国东北的冬天，南方的夏天，西北高原等地方，地面的气温气压在零高度时不是标准值，或者零高度上是标准值，但炸弹落点不是海平面。因此，炸弹的落点诸元与弹道表的表解值必然不相符合。

从实质上看，气温气压的不标准，直接效果是比重函数$H(y)$的变化（也即空气密度的变化），影响阻力加速度的变化。气温气压的不标准可以归纳为二个方面的问题，一个是目标点的气温气压不标准（包括冬、夏季目标点的温度、气压不是海平面标准值；目标点高于或低于海平面，其气温、气压不是标准值）。一个是气温、气压不按标准规律分布。我们只讨论前一个问题的影响及修正。

假如，目标点处的大气密度低于海平面标准值，但按标准规律变化。则相同高度内，相应各点的大气密度都会小于标准密度，因此弹丸受到的空气阻力相应的减少，射程A会增大，时间T会减小，其它弹道诸元也相应会发生变化。这时从弹道表上查得的表解值，与实际值便不相符合。反之亦然。因此需要进行修正。

修正的方法可以各种各样，目前常用的是修正标准落下时间Θ的方法。用修正后的Θ'查弹道表，所得到的落点诸元即为真实值。Θ'称为等效标准落下时间。修正方法如下：如图4-18所示。

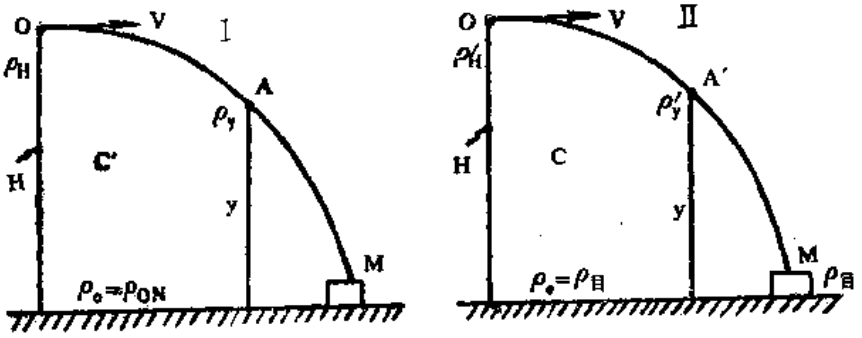


图 4-8　地面气象条件不标准时的修正图

图中弹道Ⅰ表示在标准大气条件下，由高度H、空速V_1投下一颗等效标准落下时间为Θ'的炸弹所确定的弹道，这就相当于用修正后的等效Θ'去查标准弹道表。弹道Ⅰ所解得的落点诸元就相当于以Θ'查弹道表所得的表解弹道诸元；弹道Ⅱ表示目标点处大气为非标准值的条件下由相同高度H、空速V_1投下一颗实际标准落下时间为Θ的炸弹所确定的弹道。相当于用标称值为Θ的炸弹向目标点为非标准大气条件下投弹时的实际弹道。要使这两条弹道完全相等，即弹道上各对应点诸元应相等，两条弹道上的阻力加速度就必须相等。假设A与A'点为两条弹道上的相应点，两点上的阻力加速度相等，即$J=J'$。若A点高度为y，比重函数为$H(y)$，A'高度也为y，而比重函数为$H'(y)$，则由C与Θ相对应，并由J的表达式知

$$C'\cdot H(y)\cdot F(V)=C\cdot H'(y)\cdot F(V)\ 。$$

将上式化简，并令$\dfrac{H'(y)}{H(y)}=K$，可得等效弹道系数为

$$C'=C\frac{H'(y)}{H(y)}=KC\ 。\qquad (4\text{-}97)$$

因为 $$H'(y)=\frac{\rho'_y g}{\rho_{0N} g}\approx\frac{\rho'_y}{\rho_{0N}},\quad H(y)=\frac{\rho_y g}{\rho_{0N} g}=\frac{\rho_y}{\rho_{0N}}\ 。$$

故 $$C'=C\cdot\frac{\rho'_y}{\rho_y}\ 。\tag{4-98}$$

式中，ρ'_y 为目标点为非标准气象条件时，高度 y 处的大气密度。ρ_y 为目标点为标准气象条件时，高度 y 处的大气密度。

计算表明，高度差相等的任意两点之间的空气密度之比值近似为常数。故

$$\frac{\rho'_y}{\rho_{目}}=\frac{\rho_y}{\rho_{0N}},\quad 即\ \frac{\rho'_y}{\rho_y}=\frac{\rho_{目}}{\rho_{0N}}$$

式中：$\rho_{目}$ 为目标点大气非标准状态时的密度；

ρ_{0N} 为海平面标准大气密度。

故 $$C'=C\frac{\rho_{目}}{\rho_{0N}}\ 。\tag{4-99}$$

所以，求出 C' 之后， $$\Theta'=20.197+bC'\ 。\tag{4-100}$$

根据气体状态方程式 $\rho g=\dfrac{13.6h}{R\tau}$，

式中：h 为大气压强（毫米汞高表示）；

g 为重力加速度；

τ 为大气虚拟温度；

R 为气体常数。

对于目标位置则有

$$\rho_{目}g=\frac{13.6h_{目}}{R\tau_{目}}\ 。$$

对于海平面标准大气则有

$$\rho_{0N}\cdot g=\frac{13.6h_{0N}}{R\tau_{0N}}\ 。$$

把上两式相除，得目标位置相对密度与气温气压的关系

$$\rho_{目}/\rho_{0N}=\frac{h_{目}\tau_{0N}}{h_{0N}\tau_{目}}=K\ 。\tag{4-101}$$

K 称为目标位置的气温气压修正系数。实际计算时，因为虚温 τ 与实温 t 相差甚小，可以 t 代 τ，（即忽略湿度的影响）。

最后得

$$\left.\begin{aligned}&C'=CK=C\cdot\frac{h_{目}t_{0N}}{h_{0N}t_{目}},\\&\Theta'=20.197+bC'=20.197+bCK,\\或\quad&\Theta'=20.197+(\Theta-20.197)\cdot K\ 。\end{aligned}\right\}\tag{4-102}$$

根据投弹相对高度（无线电高度表测得），空速 V_1、Θ' 和 λ_a 查表所得的表值，即为目标地区大气非标准时的实际弹道诸元。而 Θ' 的计算方法是：根据目标地区的实际气温、气

压值（包括海平面气温气压不标准或目标高于或低于海平面的情况）。由(4-101)式求K，再由(4-102)式求θ'。

至于目标地区的气温气压不按标准规律分布的情况，因不易测知其分布规律，故目前无法对这种情况作修正。

目标点气象条件非标准时的修正系数K，也可事先算出后列表备查。

六、标准落下时间、投弹高度和空速改变时，对道诸元的影响

在轰炸瞄准或作弹道计算时需要知道投弹初始条件对弹道诸元的影响，以便分析比较。

1. 标准落下时间改变时对弹道诸元的影响

当θ增大，说明炸弹的弹道性能不好，受到的空气阻力增大，因而运动速度减慢，致使落下时间T增大，射程A减小，退曳长△增大，退曳角γ也就增大。反之，情况则相反。图4-19表示θ变化时，T、A、△、γ的变化关系图象。

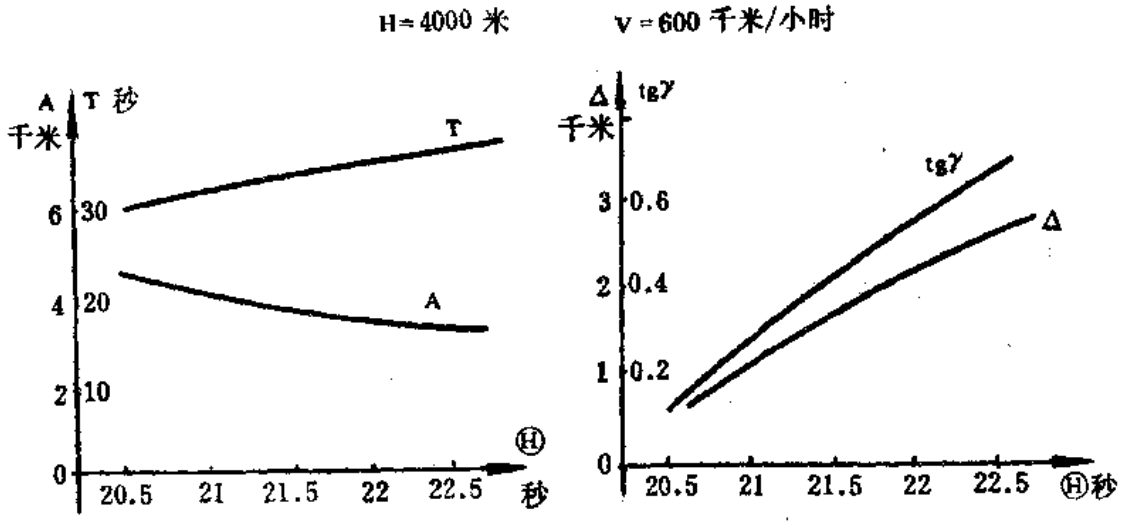


图 4-19 θ—A、T、△、tgγ关系图

2. 投弹高度H改变时对弹道诸元的影响

高度H增大时，炸弹在空间的运动间隔增大，故T增大，A增大，而飞机是等速飞行的，但炸弹的水平分速度却越来越小，所以随着T的增大，△也增大。而退曳角γ与△和H有关，所以γ不能成比例地改变。计算表明，在V_1较小且θ较小的情况下，γ角先是随H而增大，在增大到某一定数值后，则随高度的增大而减小；在V_1较大且θ较大的情况下，γ随H的增大而减小。但是，在一般情况下，退曳长△都随H的增大而增大，所以当高度变化范围不太大时，$\mathrm{tg}\gamma=\frac{\triangle}{H}$的变化甚微小，常常小到可以忽略的程度。这些变化规律，可由图4-20的图象示表。

3. 空速改变时对弹道诸元的影响

当投弹空速V增大时，炸弹水平分速度增大，射程A增大；但垂直分速度没有多少变化，故落下时间T几乎不变；由于水平分速度增大，空气阻力也会增大，因此退曳△也增大，而高度没有变化，故$\mathrm{tg}\gamma=\frac{\triangle}{H}$会增大。这些变化规律，可由图4-21所示的图象表示。

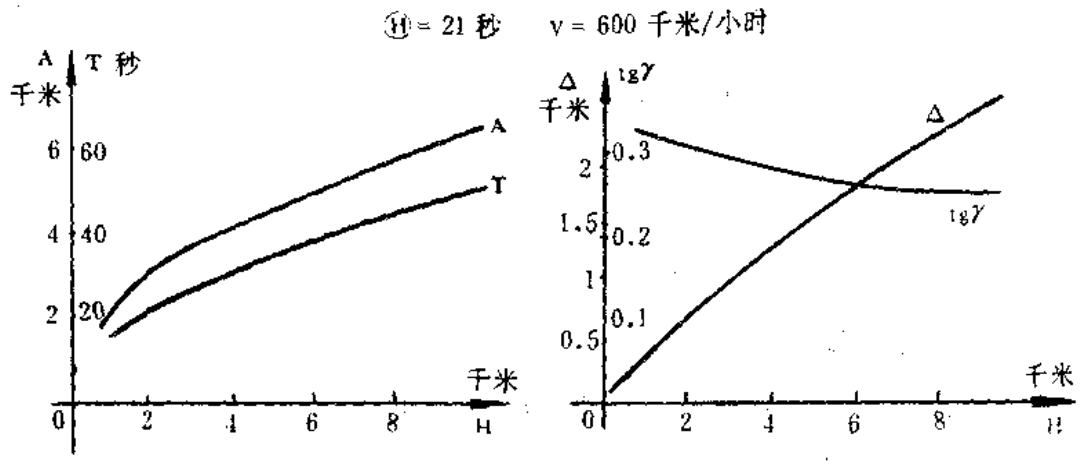


图 4-20　H—A、T、△、tgγ关系图

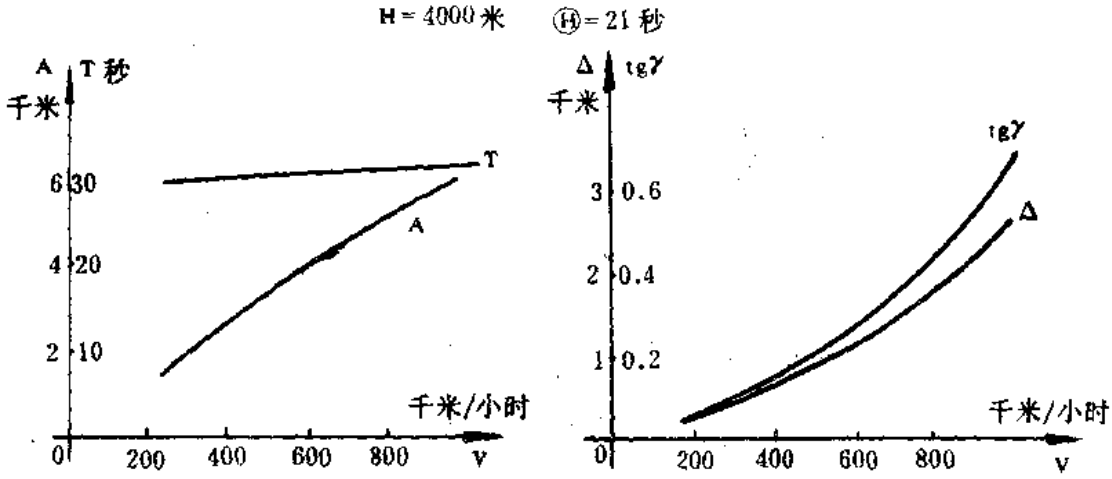


图 4-21　V—A、T、△、tgγ关系图

七、爆炸弹道的近似求解

下面介绍的近似求解法，适用于亚音速飞行，中空以下轰炸的条件。这时在弹道上，炸弹的速度，也属于亚音速范围，所以弹丸的阻力系数 $C_{x_0}(M)$ 变化不大，可近似取为常数。当 $H<5000$ 米，投弹速度 $V_1<218$ 米/秒 ≈ 785 公里/小时，（相当于 M 数 $\leqslant 0.70$）。这时的阻力系数 $C_{\bar{x}_0}(M)$ 可认为是常数。阻力函数

$$G(V,a)=G(V_x)\doteq G(V)=4.737\times10^{-4}V\cdot C_{\bar{x}_0}(V,a)=bV \quad 。$$

如令 $Cb=B$，则 $B=4.737\times10^{-4}C\cdot C_{\bar{x}_0}(V,a)$ 。

B为常数（$H<5000$ 米，$V_1<218$ 米/秒）。

由直角坐标系弹丸质心运动微分方程组

$$
\left.\begin{aligned}
&* \frac{dU}{dt} = -CH_{\tau}(y_1)\cdot G(V_{\tau})\cdot U = -CH(y_1)\cdot G(V,a)\cdot U,\\
&* \frac{dW}{dt} = -CH(y_1)\cdot G(V,a)\cdot W + g,\\
&\frac{dx}{dt} = U = V\cdot\cos\theta,\\
&* \frac{dy}{dt} = W = V\cdot\sin\theta,\\
&\text{联系方程，}\quad y_1 = H - y,\ V = \sqrt{U^2+W^2}\ 。
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}103)
$$

初始条件：$t=0$，$y=0$，$x=0$，水平轰炸：$U=V_1$，$W=0$ 。

上式参阅(2-18)式。

非水平轰炸：$U=V_1\cos\lambda_a$，$W=V_1\sin\lambda_a$。（上仰时 λ_a 为负）

将上式以变量 y 代替 t，由 $dt=\frac{dy}{W}$ 代入，变换为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{dU}{dy} = -CH(H-y)\cdot G(V,a)\frac{U}{W}, \quad ①\\
&\frac{dW}{dy} = -CH(H-y)\cdot G(V,a) + \frac{g}{W}, \quad ②\\
&\frac{dx}{dy} = \frac{U}{W} = \frac{1}{P} = \frac{1}{\mathrm{tg}\theta}, \quad ③\\
&\frac{dt}{dy} = \frac{1}{W} = \frac{1}{UP}\ 。 \quad ④
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}104)
$$

再将 $P=\frac{W}{U}$ 对 y 求导一次，并将 $\frac{dW}{dy}$，$\frac{dU}{dy}$ 值代入得

$$
\frac{dP}{dy} = \frac{UW'-WU'}{U^2} = \frac{gU}{U^2W} = \frac{g}{U^2P} \qquad (4\text{-}105)
$$

(4-105)式代替(4-104)中②式得：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{dU}{dy} = -C\cdot H(H-y)\cdot G(V,a)\cdot\frac{1}{P}, \quad ①\\
&\frac{dP}{dy} = \frac{g}{U^2P}, \quad ②\\
&\frac{dx}{dy} = \frac{1}{P} = \frac{1}{\mathrm{tg}\theta}, \quad ③\\
&\frac{dt}{dy} = \frac{1}{W} = \frac{1}{UP}\ 。 \quad ④
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}106)
$$

$V=\sqrt{U^2+U^2P^2}$ 为联系方程。

初始条件：$y=0$，$x=0$，$t=0$ 水平：$U_0=V_1$，$P_0=0$ 。
俯冲：$U_0=V_1\cos\lambda_a$，$P_0=\mathrm{tg}\lambda_a$ 。

下面对(4-106)式积分求解。

1. 对①式求解

$$\frac{dU}{dy}=-CH(H-y)G(V,a)\frac{1}{P}=-H(H-y)\cdot BV\cdot\frac{1}{P}\ 。$$

将$\frac{V}{P}$变为$\frac{U\sqrt{1+P^2}}{P}=U\cdot\sqrt{1+\frac{1}{P^2}}$，

则
$$\frac{dU}{dy}=-H(H-y)\cdot B\cdot U\sqrt{1+\frac{1}{P^2}}\ 。$$

把$\theta=0^\circ$点附近地区除外，$\sqrt{1+\frac{1}{P^2}}$值在道弹初始段大于1，以后随θ的增大，趋近于1。而$H(H-y)$在弹道初始段小于1，随着弹道下降而趋近于1，故可认为

$$H(H-y)\cdot\sqrt{1+\frac{1}{P^2}}\approx 1$$

则$\frac{dU}{dy}=-BU$，在$y=0$，$U=U_0$的初始条件积分，得

$$\int_{U_0}^{U}\frac{dU}{U}=\int_0^y -Bdy,$$

则
$$L_n\frac{U}{U_0}=-By$$

故得
$$U=U_0e^{-By} \tag{4-107}$$

2. 对②式积分，将U代入，得

$\frac{dP}{dy}=\frac{g}{U^2P}=\frac{ge^{2By}}{P\cdot U_0^2}$，在初始条件$y=0$，$P=P_0$积分

$$\int_{P_0}^{P}PdP=\frac{g}{U_0^2}\int_0^y e^{2By}dy,$$

则
$$\frac{P^2-P_0^2}{2}=\frac{g}{U_0^2\cdot 2B}(e^{2By}-1)\ 。$$

$$\left.\begin{aligned}
&\therefore\quad P=\sqrt{\frac{g}{U_0^2B}(e^{2By}-1)+P_0^2}=\frac{1}{U_0}\sqrt{\frac{g}{B}}\sqrt{e^{2By}+\frac{P_0^2U_0^2B}{g}-1},\\
&W=U\cdot P=\sqrt{\frac{g}{B}}e^{-By}\cdot\sqrt{e^{2By}+\frac{P_0^2U_0^2B}{g}-1},\\
&V=U\cdot/\cos\theta=U\cdot\sec(\mathrm{tg}^{-1}P),\\
&\theta=\mathrm{tg}^{-1}P\ 。
\end{aligned}\right\} \tag{4-108}$$

3. 对③式积分，将P值代入并令$\frac{P_0^2U_0^2B}{g}-1=-\alpha^2$

则
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{P}=U_0\sqrt{\frac{B}{g}}\frac{1}{\sqrt{e^{2By}-\alpha^2}}\ 。$$

在初始条件 $y=0$ 时 $x=0$，积分之，得

$$x=U_0\sqrt{\frac{B}{g}}\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{e^{2By}-a^2}}\ 。$$

作变量置换，把 dy 变成 $d(e^{By})=B\cdot e^{By}dy$ 后，代入上式

得
$$x=U_0\sqrt{\frac{B}{g}}\int_0^y\frac{d(e^{By})}{Be^{By}\sqrt{e^{2By}-a^2}},$$

由积分公式
$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^2}}=\frac{2}{an}\cos^{-1}\left(\frac{a}{x^{n/2}}\right)+C$$

得
$$x=\frac{U_0}{a\sqrt{Bg}}[\cos^{-1}(ae^{-By})-\cos^{-1}a] \tag{4-109}$$

4. 积分④式，将U、P值代入并在初始条件：$t=0$，$y=0$ 时积分

$$\frac{dt}{dy}=\frac{1}{UP},$$

$$\int_0^t dt=\int_0^y\frac{dy}{U_0e^{-By}\cdot\frac{1}{U_0}\sqrt{\frac{g}{B}}\sqrt{e^{2By}-a^2}}\ 。$$

同3，对 dy 作变换 $dy=\frac{d(e^{By})}{Be^{By}}$，

得
$$t=\int_0^y\sqrt{\frac{B}{g}}\ \frac{d(e^{By})}{B\sqrt{e^{2By}-a^2}}=\frac{1}{\sqrt{Bg}}\ln(e^{By}+\sqrt{e^{2By}-a^2})\Big|_0^y\ 。$$

即
$$t=\frac{1}{\sqrt{Bg}}\ln\frac{e^{By}+\sqrt{e^{2By}-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}\ 。$$

或
$$t=\frac{1}{\sqrt{Bg}}\left[\coh^{-1}\frac{e^{By}}{a}-\coh^{-1}\frac{1}{a}\right]\ 。 \tag{4-110}$$

综上所述，得落点诸元为：

水平投弹时：（$P_0=0$，$U_0=V_1$，$y=H$ 代入上列诸式）

$$\left.\begin{aligned}
&U_C=V_1e^{-BH},\\
&\theta_C=\mathrm{tg}^{-1}P_C=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1}{V_1}\sqrt{\frac{g}{B}}\cdot\sqrt{e^{2BH}-1}\right),\\
&V_C=V_1e^{-BH}\cdot\sec\theta_C,\\
&A=\frac{V_\perp}{\sqrt{Bg}}\cos^{-1}(e^{-BH}),\\
&T=\frac{1}{\sqrt{Bg}}\ln(e^{BH}+\sqrt{e^{2BH}-1})=\frac{1}{\sqrt{Bg}}\coh^{-1}(e^{BH})\ 。
\end{aligned}\right\} \tag{4-111}$$

式中：$B=4.737\times10^{-4}C\cdot C_{\bar{x}_0}(0.7)$，

对于合成阻力定律，$B=1.24\cdot C_{合成}\times10^{-4}$；

对于1969年定律，$B=2.90\cdot C_{69}\times10^{-4}$ 。

当俯冲（或上仰）投弹时：（$P_0=\mathrm{tg}\lambda_\alpha$，$U_0=V_1\cos\lambda_\alpha$，上仰时 λ_α 为负）

$$
\left.\begin{aligned}
&U_C = V_1 \cos\lambda_a \cdot e^{-BH},\\
&\theta_C = \mathrm{tg}^{-1} P_C = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1}{V_1\cos\lambda_a}\sqrt{\frac{g}{B}}\sqrt{e^{2BH}-\alpha^2}\right),\\
&V_C = V_1\cos\lambda_a e^{-BH}\cdot\sec\theta_C,\\
&A = \frac{V_1\cos\lambda_a}{\alpha\sqrt{Bg}}\left[\cos^{-1}(\alpha e^{-BH}) - \cos^{-1}\alpha\right],\\
&T = \frac{1}{\sqrt{Bg}}\ln\left[\frac{e^{BH}+\sqrt{e^{2BH}-\alpha^2}}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}\right]。
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}112)
$$

式中：B与水平投弹时相同

$$
\alpha = \sqrt{1 - \frac{BV_1^2\cdot\sin^2\lambda_a}{g}}。
$$

对于水平投弹，(4-111)式还可以用级数展开式表示

$$
\left.\begin{aligned}
&U_C = V_1\left(1 - BH + \frac{B^2H^2}{2}\right),\\
&P_C = \mathrm{tg}\theta_C = \frac{\sqrt{2gH}}{V_1}\left(1+\frac{BH}{2}\right),\\
&A = V_1\sqrt{\frac{2H}{g}}\left(1-\frac{BH}{6}\right),\\
&T = \sqrt{\frac{2H}{g}}\left(1+\frac{BH}{6}\right)。
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}113)
$$

上式使用条件：$H<5000$ 米，$V_1<218$ 米/秒，B值同前。

式中：诸元恰好是在水平真空弹道诸元的基础上增加一修正项。真空弹道诸元为

$$
\left.\begin{aligned}
&U_C = V_1,\\
&P_C = \frac{\sqrt{2gH}}{V_1},\\
&A = V_1\sqrt{\frac{2H}{g}},\\
&T = \sqrt{\frac{2H}{g}}。
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}113)
$$

第四章 习 题

4-1 总结并归纳出斜角坐标系射击弹道简化计算的依据及思路，有那些近似代替的量？

4-2 直角小抬高角坐标系射击弹道的简化计算法，为什么能适用于较远的射程及较大的高低角 ε 而不产生较大的误差？

4-3 已知某次射击时，我机速度 $V_1=250$ 米/秒，弹丸 $V_0=800$ 米/秒，$H=6000$ 米，$D=1200$ 米，$\varepsilon=20°$，$C=1.5$，

① 查 g 函数表，求目标点处弹道诸元 U、P、η、t、α，计算 V_{PJ} 值。

② 查 K 函数表，求上述诸元，并比较其误差。

4-4 已知某火箭弹的参数为 $q_0=3.99$ 公斤，$\omega=0.86$ 公斤，$l_g=0.85$ 米，$t_K=0.65$ 秒，$u_e=2170$ 米/秒，$D=1500$ 米，$C_K=1.31$，在 $V_1=250$ 米/秒，$\theta_{01}=10°$，$H=4000$ 米处发射。

① 求滑轨段弹道诸元 t_g、q_g、V_{01}。

② 求 K 点弹道诸元 V_K，θ_K，P_K，η_K，ξ_K，D_K。

③ 用等效弹道法，求目标点处的弹道诸元 η，t，θ，V，α，V_{PJ}。

4-5 某型弹丸在地面向水平方向射击试验时，测得 $V_0=700$ 米/秒，$\alpha=30'$ 时，水平射程 $A=750$ 米，$H(y)=1$，试求 η 并用道弹表插值反求弹道系数 C、飞行时间 T 及落速 V_C。

4-6 某型弹丸在地面向水平方向以某抬高角 α 射击试验，测得 $A=1500$ 米，$T=1$ 秒，知 $C=0.50$，$H(y)=1$，试用弹道表反求 V_0、V_C 及 α。

4-7 某型炸弹，$\Theta=20.50$ 秒，向地标高 $y_{目}=1000$ 米及 2000 米处投弹，设目标点处的气温气压按空军标准气象条件分布（见第一章§5），试求修正后的 Θ' 及 C'。

4-8 同上题条件，自气压高度表 $y=5000$ 米，$V_1=200$ 米/秒水平投弹，试用简化计算式求上述二目标点处的落点诸元 U_C、P_C、V_C、A_C、T、θ_C。

第二篇　飞行稳定性理论

概　述

在第一篇中，讨论弹丸质心运动方程式时，曾经作了一个重要的假设，就是认为弹丸的速度矢量始终与弹丸纵轴相重合，即认为攻角(或章动角)$\delta = 0$。因此空气阻力的作用线，通过质心并与速度方向相反，火箭弹丸的推力加速度也通过质心，方向与速度方向相同。这就是所谓的理想弹道。

实际上由于发射瞬间的初始条件、弹道的向下弯曲以及弹丸本身不是质点，它在空中运动时是难于做到攻角等于零的。因此，弹丸的运动必然是刚体运动，既有质心的运动，又有弹丸绕质心的转动。

要使弹丸能发挥它的战斗有效性，除了它的杀伤威力以外，还要求有足够的准确性。后者要求弹丸一经瞄准发射之后，就按照理想弹道或靠近理想弹道飞行，以祈命中目标。因此需要讨论弹丸的绕心运动规律，以便保证弹丸稳定地飞行，最终飞达目标。

常规武器的弹丸，可以分为无尾翼弹丸和有尾翼弹丸两大类，它们在飞行中所采取的稳定方法各不相同。

对于无尾翼弹丸，采用弹丸本身绕其纵轴高速自转的方法，以保证弹丸稳定地飞行，称为旋转稳定性。

对于有尾翼弹丸，则由尾翼产生的稳定力矩使弹丸稳定地飞行，称为摆动稳定性。

本篇分两章，分别讨论无尾翼弹丸的旋转稳定及有尾翼弹丸的摆动稳定方面的原理。称为旋转稳定理论和摆动稳定理论。

第五章　旋转稳定理论

§1　引　言

弹丸在飞行过程中，受重力加速度g的作用，弹道会向下弯曲；弹丸飞出炮口瞬间，由于炮管的磨损以及弹丸质心偏离几何中心；炮管安装角以及飞机带迎角飞行等原因，使弹丸纵轴与速度方向不相重合——产生攻角δ（又称章动角）。对于无尾翼的炮弹丸来说，由攻角所产生的空气动力作用在靠质心前方的压力中心E上。因此，对质心产生一个翻转力矩M_f。使弹丸翻转，如图 5-1 所示。

这样不仅使弹丸受到的空气阻力大为增大，速度大为减少，且使弹丸飞离理想弹道（所谓理

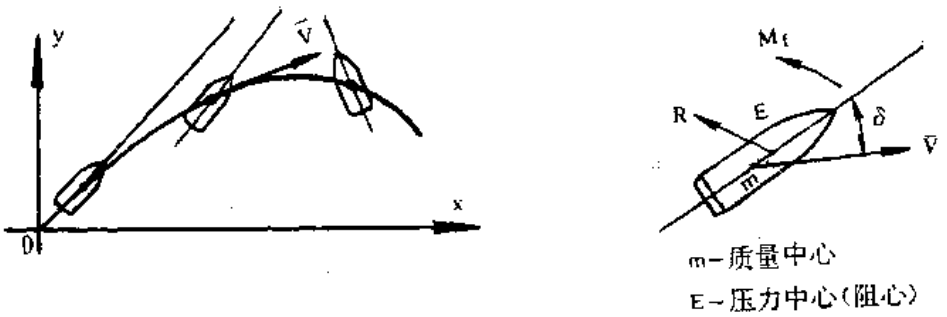


图 5-1 弹丸在飞行中的翻转现象图

想弹道，就是攻角 $\delta \equiv 0$ 时的弹道）而不能命中目标。侧风的影响以及从轰炸机上向飞行方向侧方射击的弹丸，都会产生这种现象。

对于无尾翼弹丸，要使它在飞行中不翻转，能按理想弹道飞向目标（或只产生较小的散布），可使弹丸高速旋转的办法使其稳定地飞行。研究旋转稳定的问题，在外弹道学上称为旋转稳定理论。

根据理论力学的知识，高速旋转的物体，如陀螺那样具有二个特性：一个是定轴性，它保证了弹丸轴线的方向不易被翻转力矩的作用而翻转；一个是进动性，它保证弹丸轴线的方向受翻转力矩的作用而产生进动，使弹轴方向追随弹道的弯曲而改变方向，使弹尖始终指向目标，保证命中目标时，有最大的侵彻力和引信能准确起爆。

一、高速旋转动作的产生

弹丸的高速旋转，是由炮管内壁上的膛线和弹丸上的导带相互作用而产生的。膛线就是刻制在炮管内壁上的多头大螺距特种螺纹。导带是镶在弹丸外壁上的紫铜环，其外径大于弹丸的公称直径。如图 5-2 所示。当火药气体推动弹丸沿炮管向前运动时，导带被嵌入膛线而旋转前进。我国的航空机关炮，都是等齐右旋膛线，所谓“等齐”就是指膛线的缠角 φ 等于常数。所谓“右旋”是指的向右旋转前进，即顺时针旋转前进。膛线对于炮膛轴线的倾斜角称为缠角 φ①。

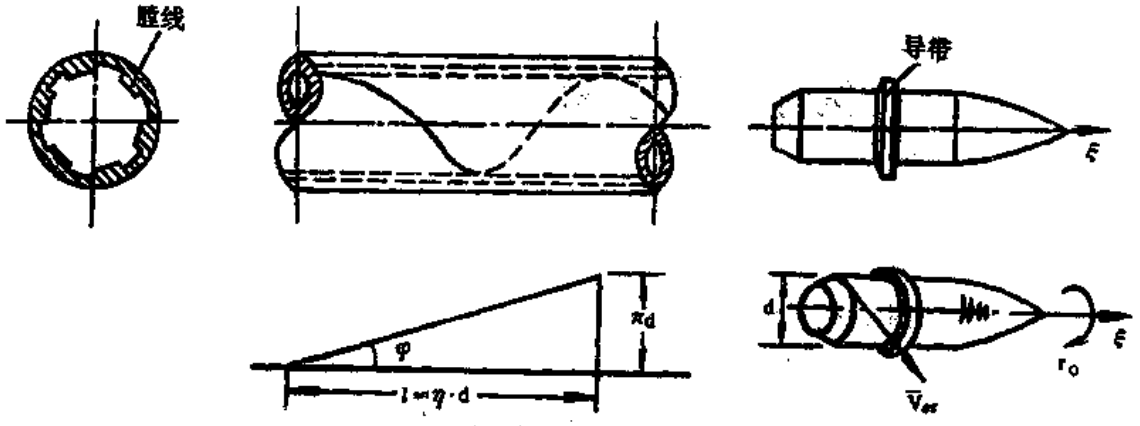


图 5-2 弹丸在炮管膛线的作用下产生自转图

① 某些大口径陆用火炮，在接近炮膛处的膛线，缠角 φ 较小，越接近炮口处缠角越大，形成变缠角膛线，称为非等齐膛线。它可使膛线不易被磨损。

缠角φ可由下式确定：当弹丸沿着炮管前进且旋转一周时，前进的距离为$l=\eta\cdot d$，而弹丸旋转一周时，弹体上某点所走的圆周距离为$\pi\cdot d$，d为弹丸直径。则

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\pi d}{\eta d}=\frac{\pi}{\eta} \tag{5-1}$$

式中：η称为膛线缠度，其物理意义是：当弹丸沿炮管旋转前进时，每旋转一周所前进的距离l是其口径的多少倍。由(5-1)式可表达为

$$\eta=\frac{\pi}{\operatorname{tg}\varphi} \tag{5-2}$$

例如23-×航炮，$\eta=25$；30-×航炮$\eta=23.85$。

当弹丸炮口速度为V_0时，弹丸的旋转角速度r_0可由图(5-2)中几何关系求得：切线速度$V_{0\tau}$为

$$V_{0\tau}=\frac{d}{2}r_0,$$

而

$$\frac{V_{0\tau}\cdot t}{V_0\cdot t}=\frac{\pi d}{\eta d}=\operatorname{tg}\varphi,$$

即$V_{0\tau}=V_0\cdot\operatorname{tg}\varphi=V_0\frac{\pi}{\eta}$，与上式比较

得

$$r_0=\frac{2\pi V_0}{\eta d} \tag{5-3}$$

一般炮弹$r_0=5\times10^4\sim15\times10^4$转/分。例如23-×航炮，$r_0=65408$转/分；30-×航炮，$r_0=73043$转/分。

二、高速转动的陀螺特性

弹丸的高速转动，产生二个陀螺特性，前面说过，一个是定轴性。一个是进动性。高速转动的陀螺，受到外力矩的作用后，并不沿力的作用方向倾倒，而是沿力矩矢量的方向进动。这就保证了弹丸在飞行中不受翻转力矩的作用而翻转，而是产生进动运动，保证弹丸纵轴方向追随弹道的弯曲而改变方向。

根据动量矩定理：质点系对于任一定轴的动量矩对时间的矢导数，等于作用于该质点系的外力系对同一轴的主矩。即

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M} \tag{5-4}$$

式中：$\vec{L}$为质点系的动量矩矢量，对于旋转弹丸，$\vec{L}=B\cdot\vec{r}_0$，B为弹丸绕纵轴ξ的转动惯量。

又由赖柴尔定理：$d\vec{L}/dt=\vec{M}=\vec{u}$

式中$\vec{u}$为动量矩$\vec{L}$矢量端点的运动速度，其方向与$\vec{M}$主矩相同，大小与M的模相等。

当弹丸有攻角δ(当弹道下降，或弹丸出炮口时有初始攻角)时，所产生的空气动力$\vec{R}$，可分解为升力(或称法向力)$\vec{R}_N$和阻力(或称切向力)$\vec{R}_x$，将空气动力$\vec{R}$自压力中心E搬移至质心m，即产生翻转力矩$\vec{M}_f$，其矩矢的方向垂直于阻力平面(包含速度矢量$\vec{V}$，弹丸纵轴和攻角δ的平面，称阻力平面)，指向ζ轴方向，如图5-3所示。

因此，动量矩矢量$\vec{L}$端点即沿着$\vec{u}=\vec{M}_f$的方向运动，其速度$u=M_f$。这样，弹轴ξ即

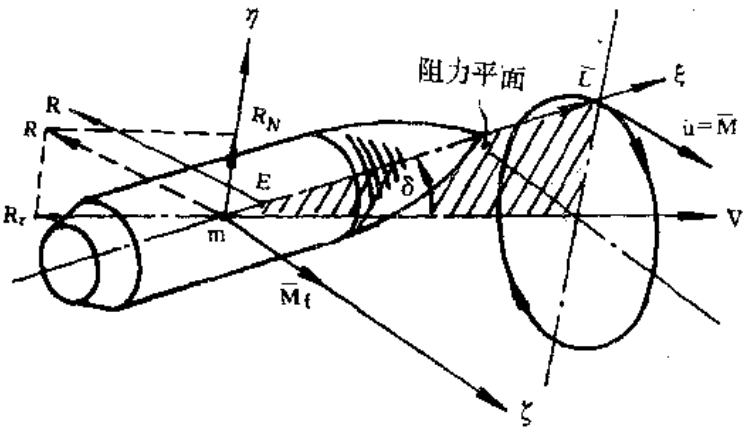


图 5-3　旋转弹丸绕速度矢量$\bar{V}$作进动图

绕质心m向$\bar{u}$方向偏斜，但速度$\bar{V}$方向没有改变，阻力面的位置却偏斜，导致$\bar{M}_f$方向的变化。不断变化的结果便是动量矩矢量（即弹轴ξ）以质心m为定点，绕速度矢量$\bar{V}$作旋转进动。当攻角δ保持为常量时，$\bar{L}$矢端的轨迹是一个垂直于$\bar{V}$矢量的园，称为正规进动。实际上由于其它原因，攻角δ不可能保持为常量。随着δ角的不同变化规律，$\bar{L}$矢端的进动轨迹，可以是各种形式的。当δ变化较小时，$\bar{L}$矢端轨迹是假正规进动，如图 5-4(*b*)；当δ变化较大时，$\bar{L}$矢端轨迹可以是正外摆线或增长外摆线，如图 5-4(*c*) 或 (*d*) 所示。

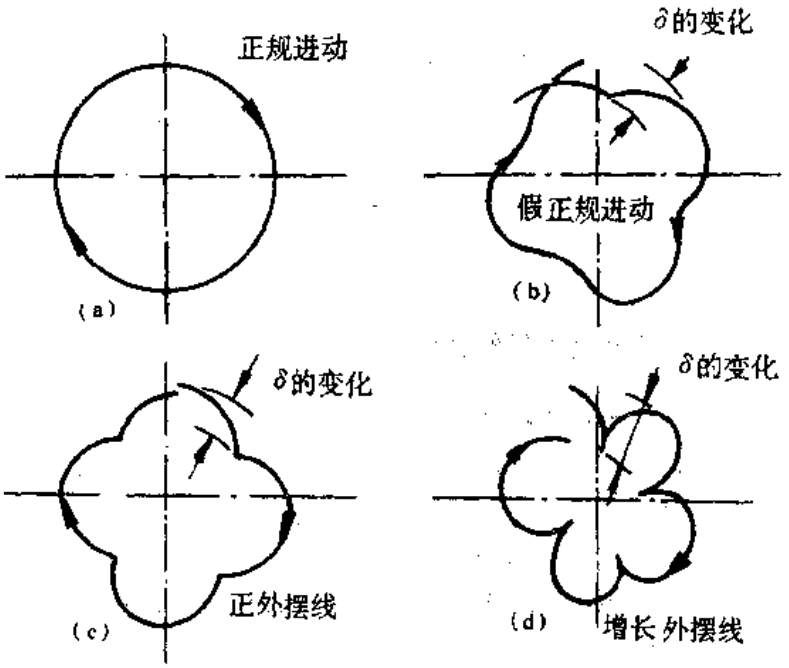


图 5-4　进动的形式图

(*a*)正规进动　(*b*)假正规进动　(*c*)正外摆线进动　(*d*)增长外摆线进动

总之，旋转稳定弹丸的实际运动包括有：

质心运动：形成弹道。

绕质心的运动：

1．自转，旋转角速度r_0。

2．进动，动量矩$\bar{L}$矢量绕速度矢量$\bar{V}$转动，章动角平面（即攻角平面也就是阻力平面）在空间旋转。角速度为$\dot{\psi}$。

3．章动，章动角δ的大小在变化。角速度为$\dot{\delta}$。

§2　作用在旋转弹丸上的力和力矩

研究弹丸绕质心的旋转运动，需要知道作用在弹丸上的力和力矩。

在第一章中讨论作用在弹丸上的空气动力时，是在假设攻角 $\delta = 0$ 的条件下求得的。这时没有升力，或者说当 $\delta < 2 \sim 3°$ 时，升力很小，可以忽略，且迎面阻力近似与 $\delta = 0°$ 时的阻力相等。而本章是在 $\delta \neq 0$ 的情况下讨论弹丸的运动的，在这种情况下，空气动力可分解为切向力 R_τ、法向力 R_N 及翻转力矩 M_f。此外，旋转弹丸还受到马格努斯力、马格努斯力矩、赤道阻尼力矩和极阻尼力矩的作用。下面分别研究。

一、迎面阻力 $R_\tau(R_x)$

如图 5-5 所示，空气动力 $\bar{R}$ 位于攻角 δ 所在平面（阻力平面）内，作用于压力中心 E 上，把它搬移到质心 m 后，分解为：切向力 $\bar{R}_\tau$，它的方向沿弹道切向的反方向，是阻止弹丸向前运动的阻力；法向力 $\bar{R}_N$，它就是升力；此外还有翻转力矩 $\bar{M}_f$。它的矢量方向垂直于阻力平面（按右手定则判定）。

根据空气动力学原理

$$R_x = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_x \text{。} \tag{5-6}$$

式中：ρ 为空气密度；V 为相对气流速度；S 为迎风面积（定义为弹丸的最大横截面积）；C_x 为随 M 和攻角 δ 变化的阻力系数。

在 $\delta \neq 0$ 时，C_x 是马赫数 M 及攻角 δ 的函数，可表为 $C_x = C_{x0}(M) \cdot f_x(\delta)$，$C_{x0}(M)$ 为攻角 $\delta = 0$ 时的阻力系数。

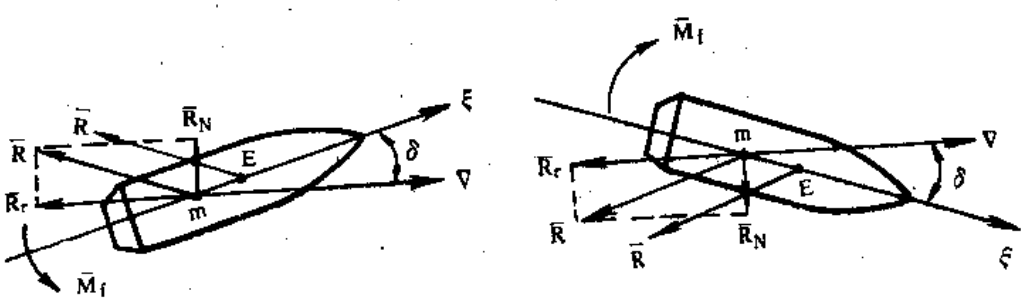


图 5-5　阻力 $\bar{R}_\tau$ 及升力 $\bar{R}_N$ 与攻角 δ 的关系图

由于阻力的方向与 δ 的正负无关，因而它是 δ 的偶函数，将 $f_x(\delta)$ 用台劳级数在 $\delta = 0$ 的附近展开得

$$f_x(\delta) = [f_x(\delta)]_0 + \left(\frac{df_x}{d\delta}\right)_0 \cdot \delta + \left(\frac{d^2 f_x}{d\delta^2}\right)_0 \frac{\delta^2}{2!} + \left(\frac{d^3 f_x}{d\delta^3}\right)_0 \frac{\delta^3}{3!} + \cdots \text{。}$$

把 δ 的奇次幂略去，并取至二次幂，则得

$$f_x(\delta) = [f_x(\delta)]_0 + \left(\frac{d^2 f_x}{d\delta^2}\right)_0 \frac{\delta^2}{2} \text{。}$$

在 $\delta = 0$ 时　　$R_x = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{x0}(M)$。

故知 $[f_x(\delta)]_0 = 1$。

如令二次幂的系数 $\left(\frac{d^2 f_x}{d\delta^2}\right)_0 = 2k$，

则在 $\delta \neq 0$ 时的空气阻力为

$$R_x = R_x = \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot S \cdot C_{x0}(M)(1+k\delta^2) \tag{5-7}$$

对于一般弹丸来说，k 值近似在 15～30 之间，可取中间值为 20。k 值可也由实验测得。

注意到 $S = \frac{\pi d^2}{4}$，$\rho = \frac{\gamma}{g}$，及 $H(y) = \frac{\gamma}{\gamma_{0N}}$。$R_x$ 可表为

$$R_x = \frac{d^2 \times 10^3}{g} \cdot H(y) \cdot V^2 \cdot \frac{\pi \gamma_{0N}}{8} \times 10^{-3} \cdot C_{x0}(M)(1+k\delta^2)$$

$$= \frac{d^2 \times 10^3}{g} \cdot H(y) \cdot V^2 \cdot K_x(M,\delta)。 \tag{5-8}$$

式中，

$$K_x(M,\delta) = 4.737 \times 10^{-4} \cdot C_{x0}(M)(1+k\delta^2)。 \tag{5-9}$$

K_x 称为阻力特征数。

二、法向力（升力）R_N（R_y）

法向力 R_N 也是攻角 δ 的函数，由于 $R_N = \frac{1}{2}\rho V^2 S \cdot C_y(M,\delta)$，把升力系数 C_y 中与 δ 的函数关系表为 $f_y(\delta)$，同理，将 $f_y(\delta)$ 在 $\delta=0$ 附近展开成台劳级数，得

$$f_y(\delta) = \left[f_y(\delta) \right]_0 + \left(\frac{df_y}{d\delta}\right)_0 \cdot \delta + \left(\frac{d^2 f_y}{d\delta^2}\right)_0 \cdot \frac{\delta^2}{2!} + \left(\frac{d^3 f_y}{d\delta^3}\right)_0 \cdot \frac{\delta^3}{3!} \cdots。$$

由图 5-5 可看出，R_N 的方向与 δ 的正负有关，所以 R_N 是 δ 的奇函数。令偶次幂的系数等于零，并取到三次幂，则

$$f_y(\delta) = \left(\frac{df_y}{d\delta}\right)_0 \cdot \delta + \left(\frac{d^3 f_y}{d\delta^3}\right)_0 \frac{\delta^3}{3!}。$$

令 $$C_y' = \left(\frac{df_y}{d\delta}\right)_0, \quad C_y''' = \left(\frac{d^3 f_y}{d\delta^3}\right)_0$$

则 $$f_y(\delta) = C_y' \cdot \delta + \frac{C_y'''}{6}\delta^3。$$

根据实验，当 δ 不太大时，上式中后一项可略去。而 C_y' 也是 M 的函数。故

$$C_y = C_y'(M) \cdot \delta = C_y(M,\delta)。$$

上式中的 $C_y'(M)$，称为升力系数导数。

在外弹道学上，对于旋转弹丸的升力，可表达为

$$R_N = \frac{dl}{g} \times 10^3 \cdot H(y) \cdot V^2 \cdot K_N(M) \cdot \delta。 \tag{5-10}$$

式中，$K_N(M)$ 称为升力特征数。

$$K_N(M) = 4.737 \times 10^{-4} \frac{d}{l} C_y'(M)。 \tag{5-11}$$

上述两式中所以用 d 和长度 l 的乘积代替（5-8）式中的 d^2，是因为升力不仅和横截面积有关，而且也和纵截面积有关。经实验测得某旋转弹丸的升力特征数与 M 数的关系如图 5-6 所示。其值约在 $(2.2 \sim 3.4) \times 10^{-4}$ 内变化。

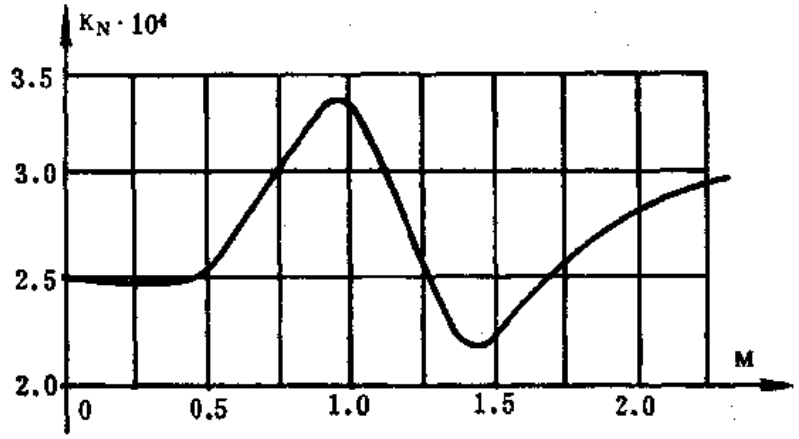


图 5-6　升力特征数 K_n 与 M 数的关系图

三、翻转力矩 M_f

翻转力矩 M_f 与升力一样，也是攻角 δ 的奇函数，根据与升力系数同样的处理方法，得

$$C_m = C_m' \delta + C_m''' \frac{\delta^3}{6} 。 \tag{5-12}$$

当 δ 较小时，忽略高次项，得

$$C_m = C_m' \delta 。 \tag{5-13}$$

C_m' 称为翻转力矩系数导数，它也是马赫数M的函数，知道了 C_x，C_y' 后，C_m' 可由下式估算。

$$C_m' = \frac{h}{l}(C_x + C_y')。 \tag{5-14}$$

在外弹道学上，把 M_f 表示为如下形式

$$M_f = \frac{d^2 h}{g} 10^3 \cdot H(y) V^2 \cdot K_m(M) \delta 。 \tag{5-15}$$

式中：$K_m(M) = 4.737 \times 10^{-4} \cdot \frac{l}{h} \cdot C_m'(M)$，为力矩特征数。

l 为弹丸的长度，h 为质心压心距离，可以用高巴尔公式估算二心距 h 。

$$\left.\begin{aligned} h &= h_0 + 0.37\, h_t - 0.16\, d \quad (\text{对圆锥形头部}) \\ h &= h_0 + 0.57\, h_t - 0.16\, d \quad (\text{对蛋圆形头部}) \end{aligned}\right\} \tag{5-16}$$

式中：h_0 及 h_t 尺寸见图 5-7 所示。

经实验测得某旋转弹丸的力矩特征数 $K_m(M)$ 曲线，如图 5-7 所示。其最大值约为 $K_m(M) = 1.35 \times 10^{-3}$ 左右。

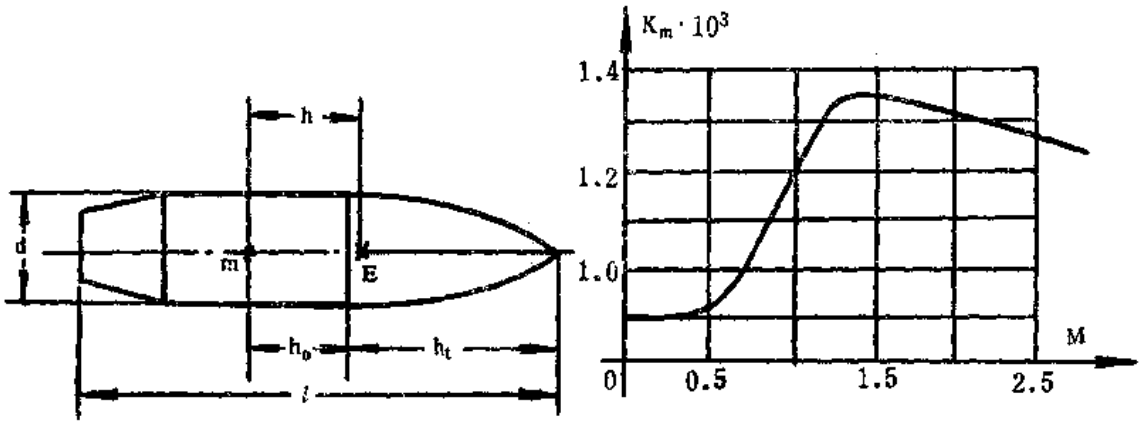


图 5-7　弹丸尺寸参数及力矩特征数 K_m 图

四、其它力和力矩

作用在弹丸上的力和力矩，除了上述的三个主要力和力矩外，尚有几个次要的力和力矩，它们对弹丸运动的影响及产生的原因，简述如下：

1．马格努斯力 R_L

当弹丸高速旋转时，由于空气的粘性，会带动周围的一层空气（称为附面层）随之旋转，在有攻角 δ 存在时，气流相对于弹丸将产生与弹轴 ξ 相垂直的分速度 $V_\delta = V \cdot \sin\delta$，如图 5-8 所示。与附面层气流合成的结果，自弹尾向弹尖方向看去，在阻力面右方的合成气流速度减小，而左方的则增加。根据伯努利定理知，流速大的地方压强减小，流速小的地方压

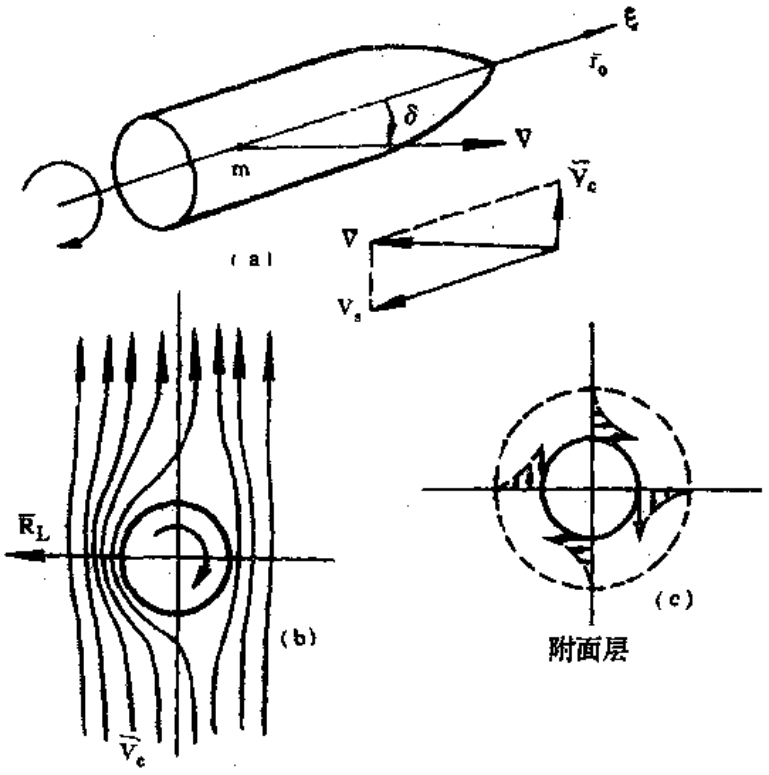


图 5-8　马格努斯力的产生图

(a)气流分速度　(b)弹丸两侧气流速度不相等　(c)附面层内的流速

强增大。所以左方的压强小于右方的压强，因此产生了一个垂直于阻力面且指向左方的合力 $\bar{R}_L$。此力即为马格努斯力。它的方向与弹丸旋转角速度矢量 $\bar{r}_0$ 和速度矢量 $\bar{V}$ 叉乘的方向（即 $\bar{r}_0\times\bar{V}$）相同。马格努斯力的表达式为：

$$R_L=\frac{d^2l}{g}10^3\cdot H(y)V\cdot r\cdot K_L(M)\cdot\delta \quad 。 \tag{5-17}$$

式中：$K_L(M)$ 称为马格努斯力特征数；

$$K_L(M)=4.737\times10^{-4}\frac{d}{l}C_L^l(M) 。 \tag{5-18}$$

$C_L^l(M)$ 为马格努斯力系数的导数，r 为旋转角速度。

经实验得知，马格努斯力只有法向力 R_N 的 6～10%，故一般弹道计算中可略去不计。

2．马格努斯力矩 $\bar{M}_L$

马格努斯力经常不作用在弹丸质心上，因而形成一个力矩。另外当弹丸摆动时，在摆动的弹丸前后端分别产生方向相反的两个马格努斯力 $\bar{R}_{L1}$ 和 $\bar{R}_{L2}$，形成马格努斯力偶，如图 5-9 所示。此力偶一起并入马格努斯力矩中。

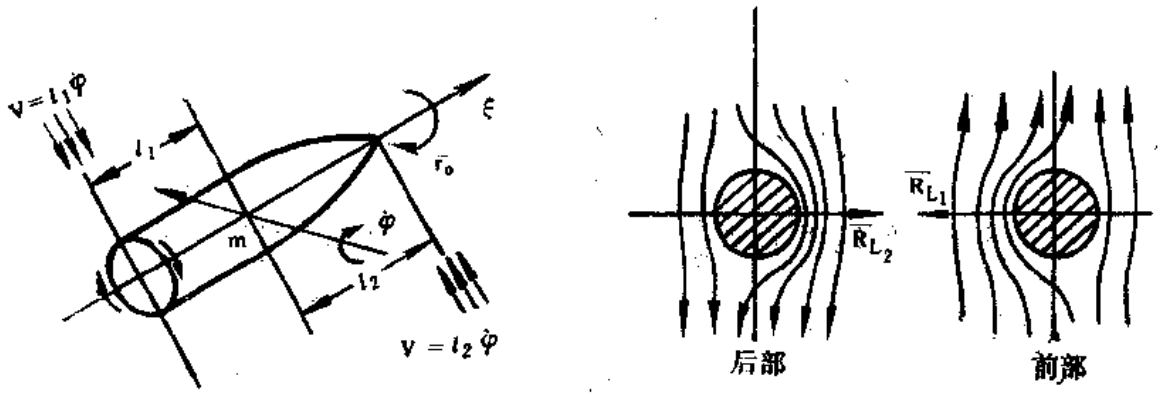


图 5-9　马格努斯力矩 $\bar{M}_L$ 的产生图

马格努斯力矩可表为

$$\bar{M}_L=\frac{d^3l}{g}10^3\cdot H(y)\cdot V\cdot r\cdot K_{mL}(M)\cdot\delta 。 \tag{5-19}$$

式中：$K_{mL}(M)=4.737\times10^{-4}\cdot C_{mL}^l(M)$，称为马格努斯力矩特征数。

$C_{mL}^l(M)$ 为马格努斯力矩系数的导数，可由实验确定。

马格努斯力矩 $\bar{M}_L$ 一般较小，可以略去不计。

3．极阻尼力矩 $\bar{M}_J$

当弹丸绕其纵轴高速旋转时，由于空气的粘性，带动弹丸周围的一薄层空气转动，这样就消耗弹丸的转动能量而使转速衰减。使弹丸旋转角速度衰减的这种阻滞力矩，称为极阻尼力矩。其方向与弹丸绕纵轴旋轴角速度 r 的方向相反。

极阻尼力矩的表达式为：

$$\bar{M}_J=-\frac{d^3l}{g}10^3\cdot H(y)\cdot V\cdot K_J(M)\cdot\bar{r} 。 \tag{5-20}$$

式中：$K_J(M)$ 称为极阻尼力矩特征数，对现代旋转弹丸其值约为 1.5×10^{-6} 左右。负号表示与 r 方向相反。

$K_J(M)=4.737\times10^{-4}\cdot C_J^l(M)$。 $C_J^l(M)$ 为极阻尼力矩系数导数。

4. 赤道阻尼力矩 $\bar{M}_D$

当弹丸绕其赤道轴 η(或 ζ)摆动时，有摆动角速度 ω，由于空气的粘性，在弹丸前后两端侧面上的空气，产生摩擦阻滞作用，阻碍弹丸绕赤道轴摆动。如图 5-10(a) 所示。

另一方面，弹丸绕赤道轴摆动时，其前后端在摆动方向一方的空气被压缩，也会由于压强的作用而阻碍弹丸的摆动，如图 5-10(b) 所示。这种阻碍摆动的力矩，称为赤道阻尼力矩 M_D，可表为

$$\bar{M}_D=-\frac{dl^3}{g}\times10^3\cdot H(y)\cdot V\cdot K_D(M)\cdot\varpi \tag{5-21}$$

式中：$K_D(M)=4.737\times10^{-4}\frac{d^2}{l^2}\cdot C_D^l(M)$，

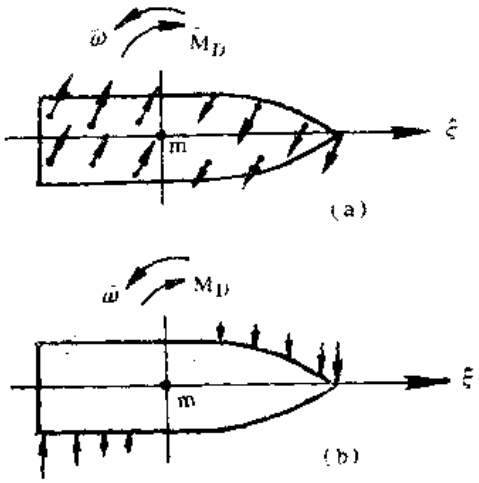


图 5-10 赤道阻尼力矩 $\bar{M}_D$ 的产生图
(a)两侧面空气分子的摩擦阻滞作用
(b)两端空气压强的阻滞作用

称赤道阻尼力矩特征数。$C_D^l(M)$ 值可由实验确定，其值约在 (0.01～0.025) l/d 左右。

M_D 的方向与摆动角速度 ϖ 的方向相反(故有负号)。

§3 在弹道的直线段上，弹丸绕质心的旋转运动

一、假设简化

为了使问题简化，根据实际情况，作如下的假设。

1. 弹丸质心的运动是理想运动，正如第二章中所述，弹丸的质心运动微分方程组已经建立并已解出。这里主要是研究弹丸绕质心的旋转运动。

2. 不论是几何上还是力学上看，弹丸是一个轴对称体。

3. 作用在弹丸的力和力矩中，忽略了马格努斯力和力矩以及极阻尼力矩和赤道阻尼力矩，因为它们与空气阻力、升力和翻转力矩相比，数值很小而可被忽略。

4. 弹道的直线段，指的是靠近炮口的一段比较平直的弹道，在直线段上弹道切线倾角 θ 的导数 $\dot{\theta}\approx0$，故不考虑 θ 的变化，也即不考虑重力的影响。

5. 此外还有一些简化假设，将在讨论中随时引入。

二、坐标系及参量的选取

弹丸在空间的绕心运动，可以用两个坐标系的相对关系来表示。如图 5-11 所示。

1. 惯性坐标轴系，其原点 o 在质心上，ox 轴在水平面上，指向弹丸速度方向的射影上。oy 轴在铅垂方向上，指向上方，oz 轴与 ox、oy 按右手定则构成直角坐标系。这样惯性坐标系就随弹丸质心在射击面内平移而不作转动。

2. 随弹丸摆动的动坐标轴系 $o\xi\eta\zeta$，随弹丸摆动而不随弹丸自转，原点 o 在质心上，$o\xi$ 与弹丸纵轴重合，指向弹尖(称为极轴)，$o\eta$ 和 $o\zeta$ 在赤道平面内(称为赤道轴)，与

$o\xi$ 按右手定则构成直角坐标系。

两个坐标轴系的相互关系是在惯性坐标轴系 $oxyz$ 的基础上依次转动了：

① 绕 oz 轴转动 θ 角，动坐标系到达 $o\xi'\eta'z$ 位置。

② 绕 $o\xi'$ 轴转动 ν 角，（称为进动角），动坐标系到达 $o\xi'\eta''\zeta$ 位置。

③ 绕 $o\zeta$ 轴转动 δ 角（称章动角），动坐标系到达 $o\xi\eta\zeta$ 位置。

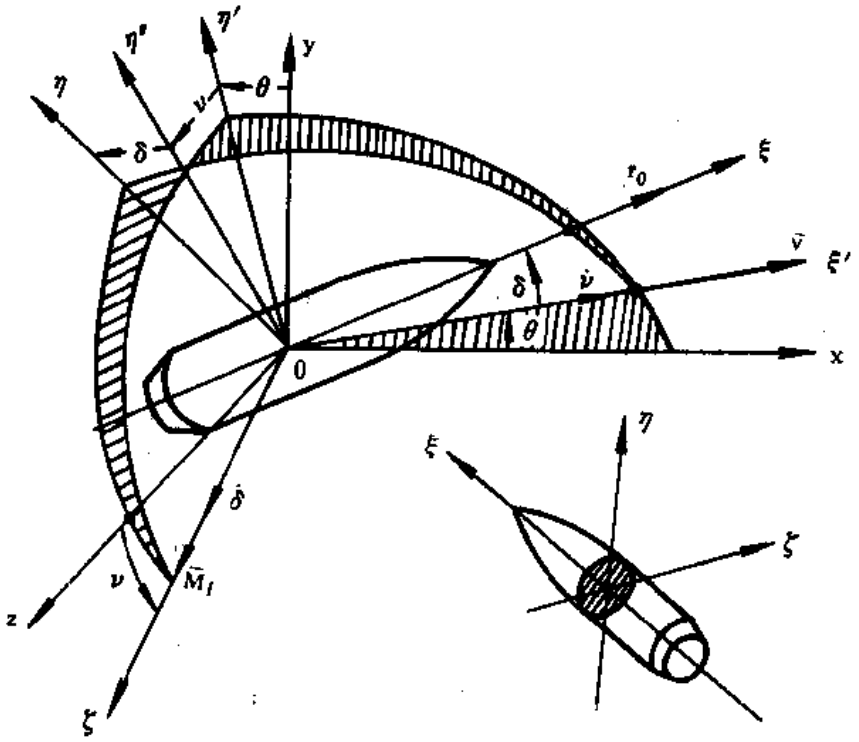


图 5-11　旋轴弹丸坐标轴系的选取及参量图

弹丸在空间转动的总角速度为

$$\overline{\Omega}=\overline{\delta}+\dot{\nu}+\overline{r}_0。\tag{5-22}$$

动坐标轴系 $o\xi\eta\zeta$ 的旋转角速度为

$$\overline{\omega}=\overline{\delta}+\dot{\nu}。\tag{5-23}$$

上式中不包含 r_0 是因为动坐标轴系不随弹丸自转。

因为 $\overline{r}_0\gg\overline{\delta}+\dot{\nu}$，故近似认为

$$\overline{\Omega}\doteq\overline{r}_0\tag{5-24}$$

弹丸的极转动惯量记为 B，由理论力学知，轴对称体的转动惯量可用质量分布系数 μ 来表示：

$$B=\mu\frac{q}{g}\left(\frac{d}{2}\right)^2\tag{5-25}$$

式中，q 为弹丸重量；d 为弹丸口径。对于一般爆破弹丸，质量分布系数 $\mu\approx0.60$；对于穿甲弹丸，$\mu=0.45$。

弹丸对于二个赤道轴 η 及 ζ 的转动惯量是相等的，称为赤道转动惯量，记作 A，一般弹丸的 A 与 B 的比值为，

$$\frac{A}{B}=8\sim10，平均值可取为9。$$

三、绕质心转动方程式

由动量矩定理知：

$$\frac{d\bar{L}}{dt}=\frac{d\bar{L}}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{L}=\sum_{i=1}^{n}\bar{M}_i。\tag{5-26}$$

式中：$\bar{L}$ 为弹丸的动量矩，$\bar{L}=B\cdot\bar{\Omega}\doteq B\cdot\bar{v}_0$；

$\frac{d\bar{L}}{dt}$ 为在绝对坐标系中，动量矩对时间的矢导数；

$\frac{d\bar{L}}{dt}$ 为在动坐标系中，动量矩对时间的矢导数；

$\bar{\omega}$ 为动坐标系的旋转角速度；

$\sum_{i=1}^{n}\bar{M}_i$ 为诸外力矩的合矢量。

(5-26) 式可表示为 ξ、η、ζ 三个轴上分量之和式，以 $\bar{\xi}^\circ$、$\bar{\eta}^\circ$、$\bar{\zeta}^\circ$ 分别表示 ξ、η、ζ 三个轴上的单位矢量，则 (5-26) 式又可表为

$$\frac{d\bar{L}}{dt}=\frac{dL_\xi}{dt}\bar{\xi}^\circ+\frac{dL_\eta}{dt}\bar{\eta}^\circ+\frac{dL_\zeta}{dt}\bar{\zeta}^\circ+\begin{vmatrix}\bar{\xi}^\circ & \bar{\eta}^\circ & \bar{\zeta}^\circ\\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta\\ L_\xi & L_\eta & L_\zeta\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}M_i\right)_\xi\bar{\xi}^\circ+\left(\sum_{i=1}^{n}M_i\right)_\eta\bar{\eta}^\circ+\left(\sum_{i=1}^{n}M_i\right)_\zeta\bar{\zeta}^\circ。$$

分别写成 ξ、η、ζ 三个轴上的标量方程式：

$$\left.\begin{aligned}\xi：&\ \frac{dL_\xi}{dt}+(\omega_\eta L_\zeta-\omega_\zeta L_\eta)=\left(\sum_{i=1}^{n}M_i\right)_\xi,\\ \eta：&\ \frac{dL_\eta}{dt}+(\omega_\zeta L_\xi-\omega_\xi L_\zeta)=\left(\sum_{i=1}^{n}M_i\right)_\eta,\\ \zeta：&\ \frac{dL_\zeta}{dt}+(\omega_\xi L_\eta-\omega_\eta L_\xi)=\left(\sum_{i=1}^{n}M_i\right)_\zeta。\end{aligned}\right\}\tag{5-27}$$

式中：L_ξ、L_η、L_ζ、ω_ξ、ω_η、ω_ζ 以及 $\left(\sum_{i=1}^{n}M_i\right)_\xi$、$\left(\sum_{i=1}^{n}M_i\right)_\eta$、$\left(\sum_{i=1}^{n}M_i\right)_\zeta$ 分别为 $\bar{L}$，$\bar{\omega}$ 及 $\sum_{i=1}^{n}\bar{M}_i$ 矢量在 ξ、η 及 ζ 轴上的投影分量。

(5-27) 式在理论力学中，称为欧拉动力方程式。将作用在弹丸上的外力矩，动量矩、转动角速度向三个轴投影并只考虑翻转力矩时，得下表。

矢量 \ 坐标轴	ξ	η	ζ
$\overline{\omega}$	$\dot{\nu}\cos\delta$	$-\dot{\nu}\sin\delta$	$\dot{\delta}$
$\overline{\Omega}$	$\dot{\nu}\cos\delta+r_0$	$-\dot{\nu}\sin\delta$	$\dot{\delta}$
$\overline{L}$	$B(\dot{\nu}\cos\delta+r_0)$	$-A\dot{\nu}\sin\delta$	$A\dot{\delta}$
$\overline{M}$	0	0	M_f

将表中数值代入（5-27）式，得绕心转动方程式

$$\left.\begin{aligned}
&\xi:\ \frac{d[B(\dot{\nu}\cos\delta+r_0)]}{dt}+[(-\dot{\nu}\sin\delta)A\dot{\delta}-(-A\dot{\nu}\sin\delta)\cdot\dot{\delta}]=0, &①\\
&\eta:\ \frac{d[-A\dot{\nu}\sin\delta]}{dt}+[B(\dot{\nu}\cos\delta+r_0)\dot{\delta}-A\dot{\delta}\cdot\dot{\nu}\cos\delta]=0, &②\\
&\zeta:\ \frac{d[A\dot{\delta}]}{dt}+[\dot{\nu}\cos\delta\cdot(-A\dot{\nu}\sin\delta)-(-\dot{\nu}\sin\delta)\cdot B(\dot{\nu}\cos\delta+r_0)]=M_f\ 。 &③
\end{aligned}\right\}\tag{5-28}$$

四、对方程式积分求解

1．由（5-28）① 得：

$$\frac{d(B(\dot{\nu}\cos\delta+r_0)]}{dt}=0,$$

故有

$$B(\dot{\nu}\cos\delta+r_0)=\text{常数}。$$

即：$\dot{\nu}\cos\delta+r_0=$常数，因为$r_0\gg\dot{\nu}$，故可认为

$$\dot{\nu}\cos\delta+r_0\approx r_0\ 。\tag{5-29}$$

这是由于没有考虑阻尼力矩的影响，故绕 ξ 轴转速没有衰减。实际上由于阻尼力矩的作用，转速是衰减的。

2．将（5-29）式值代入（5-28）② 中得

$$-A\ddot{\nu}\sin\delta-A\dot{\nu}\dot{\delta}\cos\delta+B\dot{\delta}r_0-A\dot{\delta}\dot{\nu}\cos\delta=0\ 。$$

乘入（$-\sin\delta$）得

$$A\ddot{\nu}\sin^2\delta+2A\dot{\nu}\dot{\delta}\sin\delta\cos\delta-B\dot{\delta}r_0\sin\delta=0\ 。$$

即

$$\frac{d}{dt}[A\dot{\nu}\sin^2\delta+Br_0\cos\delta]=0\ 。$$

故

$$A\dot{\nu}\sin^2\delta+Br_0\cos\delta=\text{常数}\,C\tag{5-30}$$

将起始条件：$t=0$ 时，$\delta=\delta_0$，$\dot{\delta}=\dot{\delta}_0$ 代入上式并考虑到 δ_0 很小，$\sin^2\delta_0\approx 0$，$\cos\delta_0\approx 1$。

则得

$$\text{常数}\,C=Br_0\tag{5-31}$$

将（5-31）式值代回（5-30）式得

$$\dot{\nu}=\frac{Br_0-Br_0\cos\delta}{A\sin^2\delta}=\frac{Br_0}{A(1+\cos\delta)}\ 。$$

由于 δ 的变化幅度不大，故 $\cos\delta\approx 1$，故有

$$\dot{\nu}=\frac{Br_0}{2A}=\text{常数}，令\frac{Br_0}{2A}=\alpha，积分之得$$

$$\nu=\nu_0+\alpha t=\nu_0+\frac{Br_0}{2A}t \tag{5-32}$$

上式说明了进动角速度$\dot{\nu}$是常量，进动角ν随t增长，

3．解(5-28)③式得

$$A\ddot{\delta}-A\dot{\nu}^2\sin\delta\cos\delta+Br_0\dot{\nu}\sin\delta=M_f。 \tag{5-33}$$

由(3-31)式$M_f=\frac{d^2h}{g}10^3\cdot H(y)V^2\cdot K_m(M)\delta$，乘以$A$再除以$A$变成

$$M_f=\beta A\delta\text{形式}， \tag{5-33}'$$

式中：
$$\beta=\frac{d^2h}{Ag}10^3\cdot H(y)V^2\cdot K_m(M)。$$

将M_f值及$Br_0=2A\alpha$代入(5-33)式并令$\cos\delta\approx1$，$\sin\delta\approx\delta$，得

$$A\ddot{\delta}-A\alpha^2\delta+2A\alpha^2\cdot\delta-A\beta\delta=0。$$

即

$$A\ddot{\delta}+A\alpha^2\delta-A\beta\delta=0，\quad \ddot{\delta}+(\alpha^2-\beta)\delta=0。 \tag{5-34}$$

在直线段，g及V变化不大，故近似认为$\beta=$常数。则(5-34)式是常系数二阶齐次方程。

把$(\alpha^2-\beta)$变为$\alpha^2\left(1-\frac{\beta}{\alpha^2}\right)$，

令
$$\left(1-\frac{\beta}{\alpha^2}\right)\approx\sigma \tag{5-35}$$

(5-34)式变为

$\ddot{\delta}+\alpha^2\sigma\delta=0$。此方程在$\sigma>0$时的通解为

$$\delta=X\cdot\sin(\alpha\sqrt{\sigma}\,t+Y)$$

式中：X，Y为待定系数，代入初始条件，当$t=0$时，$\delta=0$①，$\dot{\delta}\approx\dot{\delta}_0$，得

$$\left.\begin{aligned}\delta_0&=X\sin Y\approx0，\\ \dot{\delta}&=\alpha\sqrt{\sigma}\cdot X\cdot\cos Y\approx\dot{\delta}_0。\end{aligned}\right\}$$

因为X是振幅，故$X\neq0$，只能是$Y=0$，

联立求解得：
$$X=\frac{\dot{\delta}_0}{\alpha\sqrt{\sigma}}$$

$$\delta=\frac{\dot{\delta}_0}{\alpha\sqrt{\sigma}}\cdot\sin\alpha\sqrt{\sigma}\,t \tag{5-36}$$

综上所述，可得弹丸在直线段内绕质心旋转运动的解为

$$\left.\begin{aligned}&Br_0=\text{常数}，\\ &\dot{\nu}=\alpha=\frac{Br_0}{2A}，\end{aligned}\right.$$

① 当$t=0$时，$\delta\neq0$，也可解得相似的结果。

$$\left.\begin{aligned} \nu &= \nu_0 + \dot{\nu} t , \\ \delta &= \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha\sqrt{\sigma}} \sin \alpha\sqrt{\sigma}\, t 。 \end{aligned}\right\} \tag{5-37}$$

可看出当考虑翻转力矩 M_f 而略去其它力矩时，有

① 弹丸绕其纵轴作等角速度自转运动；

② 进动角速度 $\dot{\nu}$ 保持恒角速度；

③ 弹丸绕其赤道轴作周期性的章动，振幅为 $\frac{\dot{\delta}_0}{\alpha\sqrt{\sigma}}$，周期为

$$T = \frac{2\pi}{\alpha\sqrt{\sigma}} 。 \tag{5-37}'$$

实际上由于阻尼力矩及马格努斯力矩的存在，自转和进动角速度是逐渐减小的。而在 $\sigma = 1 - \beta/\alpha^2$ 中的 β 值，由于随 V 的下降而递减，故 σ 值是递增的，所以章动振幅和周期是逐渐衰减的。故在 $\sigma > 0$ 的条件下，弹丸在直线段上不会翻转而只能是稳定地飞行。

五、直线段上的飞行稳定性

由前所述知：在 $\sigma > 0$ 时，弹丸在直线段上的飞行是稳定的。下面讨论 σ 为其它值的情况。

当 $\sigma = 1 - \frac{\beta}{\alpha^2} = 0$ 时，在此情况下 (5-34) 式可写成

$$\ddot{\delta} = 0 。$$

解此方程式得

$$\dot{\delta} = 常数\ C ,$$

$$\delta = C_1 + C_2 t 。$$

可见，δ 随 t 而增长，是不稳定的飞行。

当 $\sigma = 1 - \beta/\alpha^2 < 0$ 时，在此情况下 (5-34) 式可写成

$$\ddot{\delta} + \alpha^2 |\sigma| \delta = 0 。$$

解此方程式得

$$\delta = \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha\sqrt{|\sigma|}} \cdot sh(\alpha\sqrt{|\sigma|}\, t) 。$$

章动角 δ 是双曲正弦函数，而双曲正弦函数是随 t 而增长的，其图象如图 5-12 所示。所以 δ 随 t 增长而不稳定。

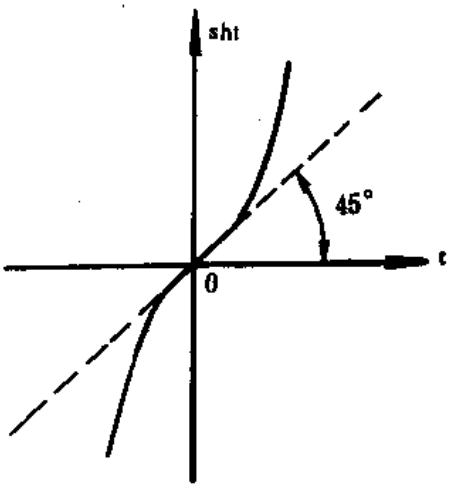


图 5-12　双曲正弦函数图

因此要保证弹丸稳定地飞行，必须保证 $\sigma > 0$，由此而引出 σ 与缠度 η 的关系来。

由 $\sigma = 1 - \frac{\beta}{\alpha^2} > 0$，有 $\beta < \alpha^2$。

$\beta = \frac{d^2 h}{Ag} 10^3 \cdot H(y) V^2 K_m(M)$，而 $H(y) \cdot K_m(M)$ 变化值较小，若取 $V = V_{max} = V_{01}$，则 β 有最大值。

$$\beta_0=\beta_{max}=\frac{d^2h}{Ag}10^3\cdot V_{01}^2\cdot K_m\left(\frac{V_{01}}{a}\right)$$ （式中 $H(y)$ 取为 1 ）。

令 $K_m\left(\frac{V_{01}}{a}\right)=K_{mo}$，则有

$$\frac{d^2h}{Ag}10^3\cdot V_{01}^2\cdot K_{mo}<\alpha^2=\left(\frac{Br_0}{2A}\right)^2 \tag{5-38}$$

要保证上式成立，弹丸应有足够大的自转角速度 r_0，将 $r_0=\frac{2\pi V_0}{\eta d}$ 代入上式，并注意到 $B=\mu\cdot\frac{q}{g}\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2$，$\frac{A}{B}\doteq 9$。经整理后得

$$\eta<\frac{V_0\pi\times10^{-2}}{2V_{01}d}\sqrt{\frac{10\mu q}{9hK_{mo}}} \tag{5-39}$$

式中：μ 为质量分布系数，对于爆破弹丸 $\mu=0.60$，对于穿甲弹丸 $\mu=0.45$，在这里应取 $\mu=0.45$；

q 为弹丸重量；

h 为压心至质心距离；

K_{mo} 为 $V\approx V_{01}$ 时的力矩特征数；

η 为炮管缠度应取的最大值。即 η 有上限。

若令 η 极限值

$$\eta_{max}=\frac{V_0\pi\times10^{-2}}{2V_{01}d}\sqrt{\frac{10\mu q}{9hK_{mo}}}。 \tag{5-40}$$

则设计炮管时，应使缠度 $\eta<\eta_{max}$ 才能保证弹丸在直线段上稳定地飞行。

η_{max} 与 $K_m(M)$ 的关系，如图 5-13 所示。如果弹丸的 M 数在 M_1 与 M_2 之间，则应取 η_{max} 为 $\eta_{m,min}$。

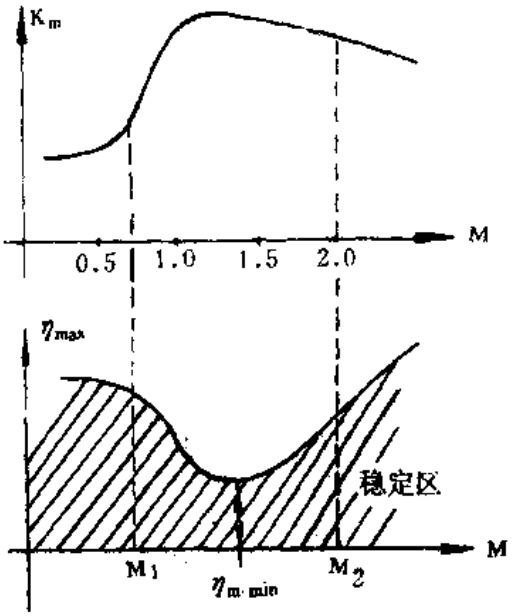


图 5-13 最大缠度 η_{max} 与力矩特征数 K_m 的关系图

有时取弹重系数 $C_q=\frac{q}{d^3\times10^3}$ 公斤/公尺^3（d 用公寸代入）代入 (5-39) 式 q 中，则

$$B=\mu\frac{C_q\cdot d^5}{4\cdot g}\times10^3,$$

$$\eta_{max}=\frac{V_0}{V_{01}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\mu\cdot C_q}{\frac{h}{d}\cdot\frac{A}{B}K_{mo}}}。 \tag{5-41}$$

六、弹丸的绕心转动

将 (5-37) 式进动角公式和章动角公式联立，消去 t 变量，可得 ν 与 δ 的关系式。

由 $\nu=\nu_0+\alpha t$，得 $t=\frac{\nu-\nu_0}{\alpha}$。

代入 $\delta=\frac{\dot\delta_0}{\alpha\sqrt{\sigma}}\sin\alpha\sqrt{\sigma}\,t$ 中，得

$$\delta=\frac{\dot{\delta}_0}{\alpha\sqrt{\sigma}}\cdot\sin(\nu\sqrt{\sigma}-\nu_0\sqrt{\sigma})。\qquad(5\text{-}42)$$

可画出弹轴 ξ 在垂直于 V 矢量的平面上划出的极坐标轨迹图及 $\delta-\nu$ 关系图，如图 5-14 所示。图中：

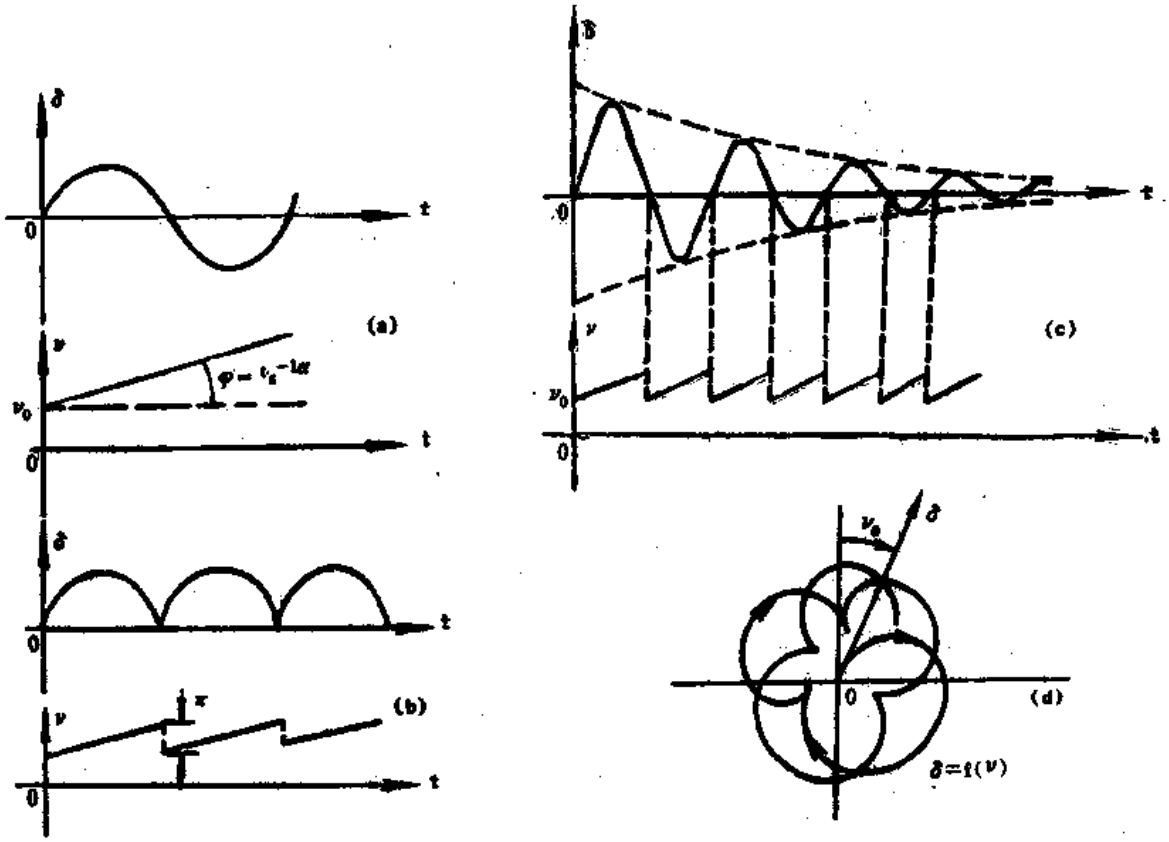


图 5-14　章动角 δ 与进动角 ν 的关系图

(a) δ 及 ν 与 t 的关系　　(b) δ 及 ν 与 t 关系取正半周值

(c)衰减的 δ 及 ν 与 t 的关系　　(d)用极坐标表示的 $\delta=f(\nu)$ 关系

（a）$\delta(t)$ 及 $\nu(t)$ 关系图。

（b）为了作图方便，把 δ 量画成正值，把 ν 按 δ 的周期突变 180° 连续画图（因为在空间 δ 值难于区分正负）。

（c）考虑到在阻尼力矩作用下，速度 V 随 t 增长而减少，β 减小而 σ 增大，δ 及 ν 也随 t 而衰减，章动周期也减少。

（d）$\delta=f(\nu)$ 用极坐标表示时，弹轴 ξ 在垂直于 V 矢量的平面上的运动轨迹图。

§4　在弹道曲线段上，弹丸绕质心的旋转运动

弹道的曲线段与直线段的区别，就在于曲线段上由于重力加速度 g 的作用，弹道切线倾斜角 θ 的变化率 $|\dot{\theta}|\neq 0$ 而不能忽略，而直线段则认为 $|\dot{\theta}|=0$，可以忽略。直观地说，曲线段是指弹道上比较弯曲的部分。而弹道的直线段和曲线段，并没有严格的分界点。

一、曲线段上弹丸的运动特点

前节已讲过，为使弹丸在直线段上稳定地飞行，要求稳定因子即缠度 $\eta<\eta_{max}$，也就是说要求弹丸有足够高的自转角速度 r_0，以保证章动角 δ 不发散，使弹丸有足够的陀螺定轴性。

但当弹丸进入曲线段以后，矛盾发生了变化。由于弹道逐渐弯曲，如果弹轴的定轴性过强，弹轴就不能追随弹道切线而改变方向，最后弹丸将不能以弹尖命中目标，且会因 δ 角增大使弹丸升力增大，从而增大弹丸的散布，使整个射击效率降低。如图 5-15 所示。

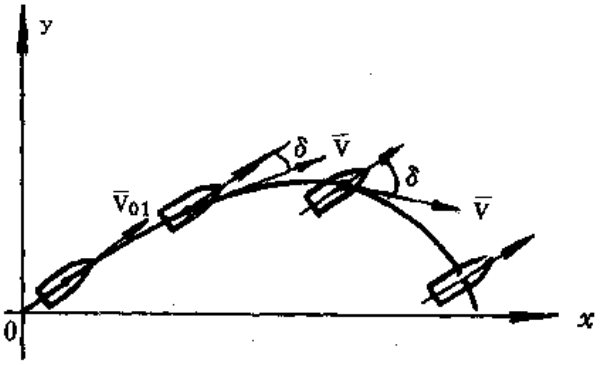


图 5-15　定轴性太强的旋转弹丸图

设计得好的机关炮，弹丸飞行时的轴线方向并不象图 5-15 那样，而是追随弹道切线的方向而改变其方向，也就是说，弹丸的陀螺定轴性并不太强，而能恰到好处地追随弹道切线而改变方向，这就叫做弹丸的飞行顺向性。在直线段上的陀螺定轴性和曲线段上的飞行顺向性使弹丸在全弹道上稳定地飞行。

空中射击时，目标距离都不很大，所以空中射击弹道都是在弹道上的较平直部分就命中目标。因此，曲线段弹道对于空中射击弹道来说，并无直接关系，所以我们不作详细讨论，这里我们以为“平均效果”来讨论弹丸在曲线段上的运动，比较直观，易于理解。

假如在直线段末，由于阻尼力矩及 $\sigma(=1-\beta/\alpha^2)$ 值的递增，章动运动逐渐衰减，设 $\delta\to 0$。这时，弹丸纵轴 ξ 的位置称弹轴的平均位置。由于弹道切线的方向也即速度矢量 $\bar{V}$ 的方向不断下降，而弹轴 ξ 的方向下降总是比 $\bar{V}$ 矢量的方向滞后一个时间，因而就在过切线的平面内形成新的章动角 δ，相应地会产生与 δ 角相对应的翻转力矩 M_f。因而产生了动力平衡角。

二、动力平衡角 δ_y 的产生

如果我们把连续弯曲的弹道看作是由许多段折线所组成，把每段折线看作一个小直线段，如图 5-16 所示的$\overline{01}$、$\overline{12}$、$\overline{23}$、……。$\overline{01}$ 为直线段，与 $\bar{V}_{01}$ 重合，$\overline{12}$ 为第一个折线段，这时的速度 $\bar{V}$ 突变了一个 δ_1 角而到达 $\overline{12}$ 的方向，从而产生了与 δ_1 相应的翻转力矩 M_{f1}。

根据动量矩定理，弹轴 ξ 要绕着 $\overline{12}$ 矢量作进动，如图 5-16 所示。在与射击面 xOy 相垂直的铅垂平面上，由弹轴平均位置的延长线所画出之图形就是绕“1”点转动一个与 δ_1 角相应的角 δ_1'。弹丸运动到达“2”点之后，速度矢量 $\bar{V}$ 又突然改变方向，此时弹轴的平均位置，将绕 $\overline{23}$ 矢量进动，如图 5-16 所示，绕“2”点转动一个 δ_2' 角。……。如此继续下去，弹轴平均位置的延长线就画出了图 5-16 右边的间断弧线。当把折线的长度 $\overline{12}$，$\overline{23}$……取得无限小时，弹丸质心运动的折线。就趋于一条光滑的曲线（即弹道的弯曲部分）。这时弹轴进动的轨迹也就变成一条光滑的摆线了。

可以看出，这时弹轴平均位置的方向，要偏离出射击面来。对于右旋弹丸来说，向右方偏离（自弹尾向弹尖方向看去）。

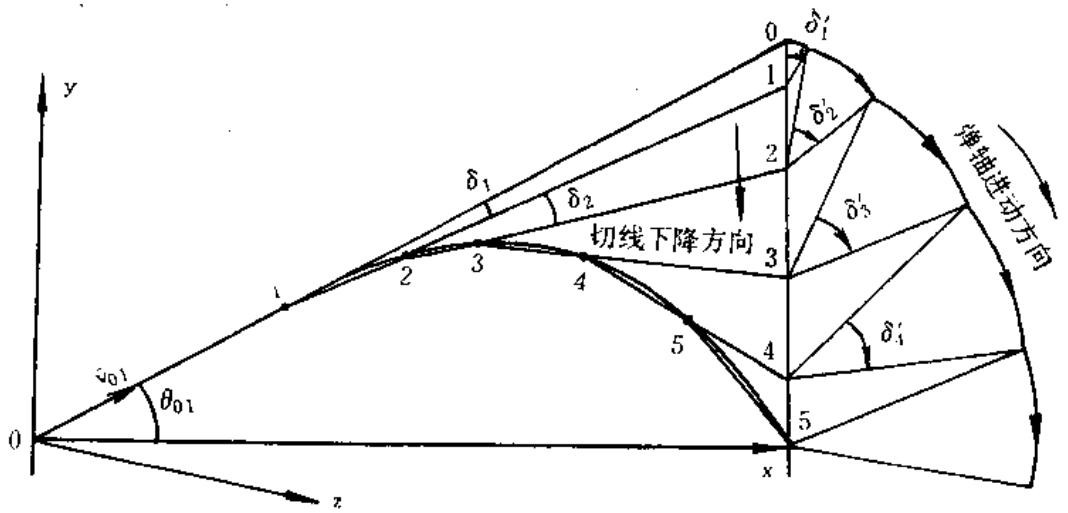


图 5-16　曲线段弹道上的分段进动图

这一非周期性的偏离角，也就是弹轴平均位置与速度矢量 V 间的夹角，称为动力平衡角 δ_P。围绕着非周期偏离而摆动的，还有象直线段那样的周期性微幅摆动，如图 5-17(a) 所

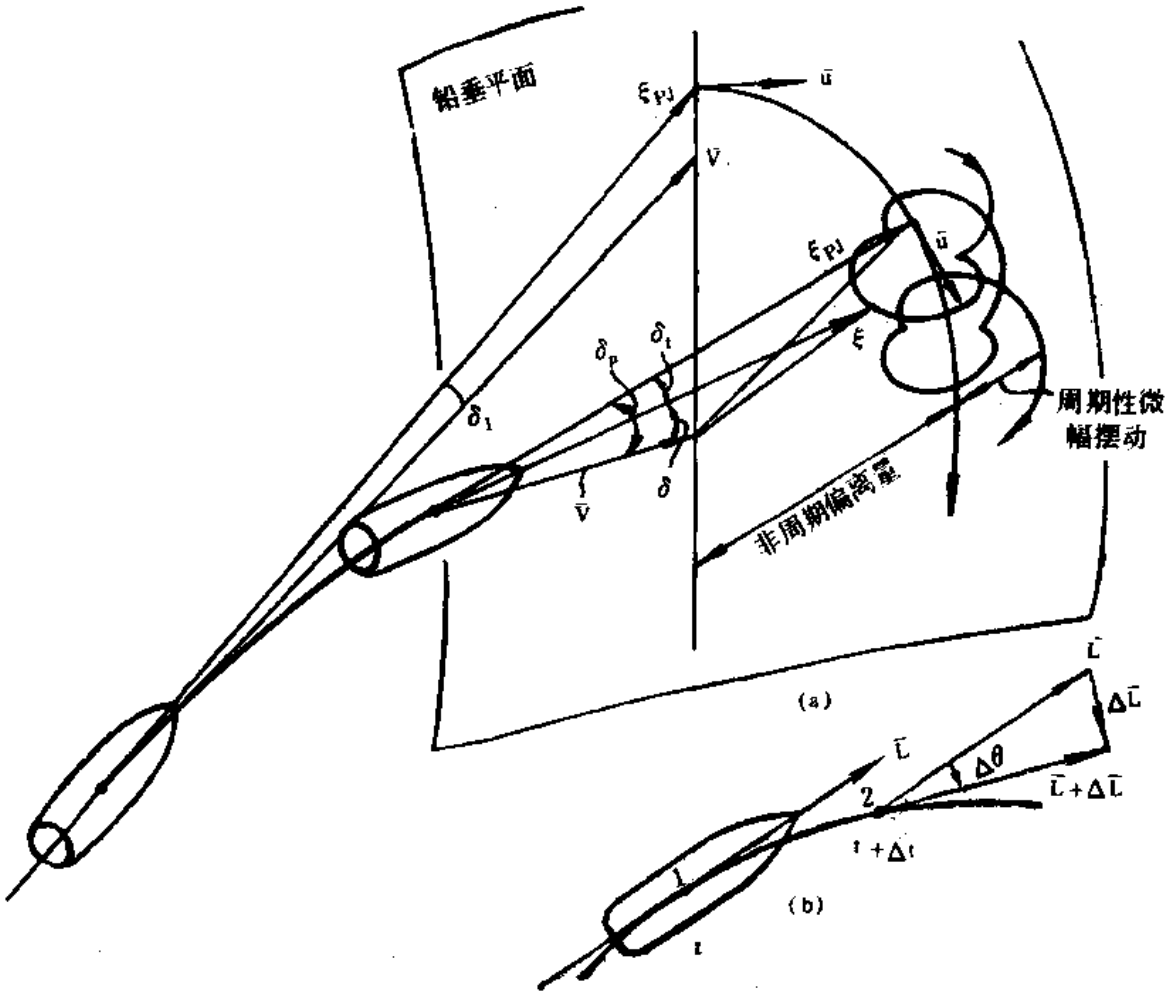


图 5-17　动力平衡角 δ_p 的产生图
(a)周期性微幅摆动和非周期偏离　(b)动量矩 $\bar{L}$ 的变化

示。弹轴 ξ 追随速度 $\vec{V}$ 矢量而改变方向的原因就是由于有了偏离右方（对右旋弹丸来说）的动力平衡角 δ_p，因而产生了一个矢量方向与 δ_p 所在平面相垂直的翻转力矩 $\vec{M}_{fp}$，从而使弹轴（ξ_{PJ}）平均位置进动的结果。当然我们要求弹轴的动力平衡角 δ_p 不能过大，因为过大了也不利于稳定飞行。

三、动力平衡角 δ_p 的求解

如图 5-17(*b*) 所示。在旋转弹丸中，由于章动角速度，$\dot{\nu}+\dot{\delta} \ll r_0$，动量矩 $\vec{L} \approx B\vec{r}_0$，方向指向弹轴 ξ 方向，在弹道“1”点上，动量矩方向与“1”点的速度方向重合。到达“2”点时，所经时间为 Δt，动量矩方向改变量为 $\Delta\theta$，动量矩改变量为 $\Delta\vec{L}$，这是由于产生翻转力矩 M_{fp} 使弹轴方向追随弹道切线所产生的结果。翻转力矩 M_{fp} 的大小为

$$M_{fp} = A \cdot \beta \cdot \delta_p \qquad \text{见 (5-33)}' \text{ 式}$$

由动量矩定理

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}_{fp} = A\beta\vec{\delta}_p \text{。}$$

由图 5-17(*b*) 知

$$\Delta L = L \cdot \Delta\theta,$$

代入上式得

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{L \cdot \Delta\theta}{\Delta t} = L\frac{d\theta}{dt} = A\beta\delta_p \text{。}$$

故

$$\delta_p = L\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{1}{A\beta} = \frac{Br_0}{A\beta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \text{。} \tag{5-43}$$

由此看出 δ_p 与切线倾角 θ 的变化率 $\dot{\theta}$ 有关

在弹道曲线段上的法向加速度为

$$V\frac{d\theta}{dt} = g \cdot \cos\theta \text{。}$$

故 $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{g\cos\theta}{V}$，代入 (5-43) 式中得

$$\delta_p = \frac{Br_0}{A\beta} \frac{g\cos\theta}{V} \text{。} \tag{5-44}$$

因而动力平衡角与弹道切线倾角 θ 及速度 V 有关。在弹道顶点 S 处，$\theta_s = 0$，$\cos\theta_s$ 有最大值。因此 δ_{PS} 有最大值。为保证弹丸稳定地飞行，要求 δ_{PS} 不大于允许值 $\delta_{PS\max}$。

即

$$\delta_{ps} = \frac{Br_0}{A\beta} \frac{g}{V_s} < \delta_{PS\max} \text{。} \tag{5-45}$$

一般要求 $\delta_{PS\max} = 12^\circ \sim 15^\circ = 0.21 \sim 0.26$ 弧度。

四、弹丸在曲线段上的飞行稳定性

把弹丸自转角速度 r_0 及 β 的值代入 (5-45) 式中，得

$$\delta_{PS} = \frac{B2\pi V_0}{A\eta d}\left(\frac{Ag}{d^2 h\, 10^3 H(y_s) V_s^2 \cdot K_{ms}}\right)\frac{g}{V_s} < \delta_{PS\max} \text{。}$$

即

$$\eta > \frac{2\pi V_0 B g^2}{d^3 \cdot h \cdot 10^3 \cdot H(y_s) \cdot V_s^3 \cdot K_{ms} \cdot \delta_{PS\max}}。$$

因此炮管缠度 η 有下限：

$$\eta_{\min} = \frac{2\pi V_0 B g^2}{10^3 d^3 h H(y_s) V_s^3 K_{ms} \delta_{PS\max}}。 \tag{5-46}$$

设计航炮炮管时，要求缠度 $\eta > \eta_{\min}$，即能保证弹丸在曲线段上稳定地顺向飞行。

通常仿照 (5-41) 式，取缠度 $\eta_{\min}$ 为

$$\eta_{\min} = a \cdot \frac{V_0}{V_{01}} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\mu \cdot C_q}{\frac{h}{d}\frac{A}{B} K_{m0}}}。 \tag{5-47}$$

式中：a 为安全系数，通常取 $a = 0.75 \sim 0.85$，并取 a 的大值。因为当 $\eta \to \eta_{\max}$ 时，意味着缠度大，弹丸的自转角速度 r_0 小，炮管膛线的磨损小，炮管寿命增长。由（5-44）式还可看出，r_0 小则 δ_P 小，会使弹着点密集度增高。

所以设计炮管时，取

$$\eta_{\max} > \eta > \eta_{\min}。$$

缠度范围如图 5-18 所示的阴影部分之内，其物理意义是：当 $\eta > \eta_{\max}$ 时，说明弹丸的 r_0 太小，在弹道的弯曲段，δ 增大，在翻转力矩的作用下，弹轴 ξ 就会翻转；当 $\eta < \eta_{\min}$ 时，说明弹丸自转 r_0 太大，定轴性太好，弹轴不易进动，因此也不能稳定飞行。

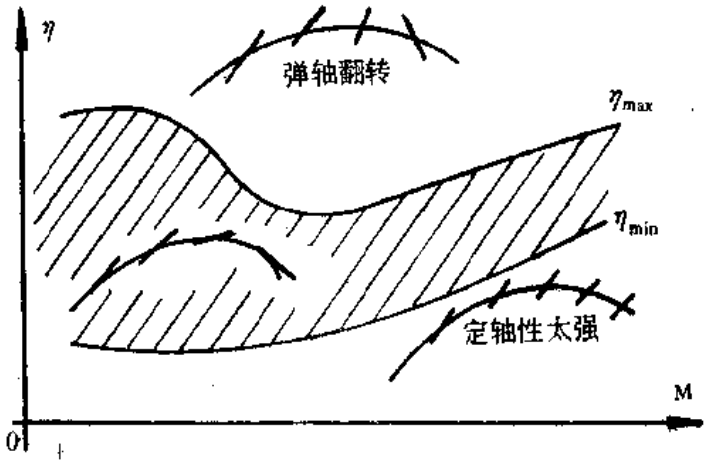


图 5-18 炮管缠度取值范围图

§5 绕质心转动对质心运动的影响

一、周期性摆动对射程及散布的影响

弹轴运动的周期性摆动（即章动角 δ 的周期性变化）使阻力或弹道系数增大了 $(1+k\delta^2)$ 倍，因此使弹丸速度降低，射程减少。这是由于各种随机因素的影响，形成起始扰动 δ_0 及 δ_0 的变化。从而引起了各发弹的章动幅值的变化，使弹道造成不同的散布并降低了速度 V。

考虑章动角存在时的弹丸质心运动方程组应为如下形式，对斜角坐标系：

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} &= -C(1+k\delta^2) \cdot H(y) \cdot G(V,a) \cdot U, \\
\frac{dW}{dt} &= -C(1+k\delta^2) \cdot H(y) \cdot G(V,a) \cdot W + g \\
\frac{d\xi}{dt} &= U,
\end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{d\eta}{dt}=W,\\
&y=H+\xi\sin\theta_{01}-\eta\\
&V=U\dot{\xi}^{\circ}+W\dot{\eta}^{\circ},\\
&a=\sqrt{KgR\tau}\quad(K\approx 1.4,\ g=9.8,R\approx 29.27),\\
&\tau=\tau_0-Gy\quad(G\text{为温度梯度}),\\
&\delta=\delta_m\cdot\sin\alpha\sqrt{\sigma}\ t,\\
&\delta_m=\delta_{m0}\cdot E_{XP}\left\{-\int_0^t\left(\frac{K_D+K_N-K_J}{2}\right)V\,dt\right\}^{①},\\
&\delta_{m0}=\frac{\delta_0}{\alpha_0\sqrt{\sigma_0}}\ 。
\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}48)
$$

为了增大积分步长，可用平均值 $\overline{\delta}^2$ 代替 δ^2，

$$
\overline{\delta}^2=\frac{\delta_m^2\int_0^{T/2}\sin^2\alpha\sqrt{\sigma}\ t\,dt}{T/2}=\frac{\delta_m^2}{2}。
$$

式中：　$\alpha_0=\dfrac{Br_0}{2\cdot A}$；

$\sigma_0=1-\dfrac{\beta}{\alpha_0}$；

$K_D=K_D(M)\approx 4.737\times10^{-4}\dfrac{d^2}{l^2}C_D^l(M)$ 赤道阻尼力矩特征数；

$K_N=K_N(M)=4.737\times10^{-4}\dfrac{d}{l}C_y^l(M)$ 法向（升力）力特征数；

$K_J\approx K_J(M)\approx 4.737\times10^{-4}C_J^l(M)$　极阻尼力矩特征数。

k 为修正系数，对一般弹丸其值约为 15～30，可取其中间值为 $k=20$ 左右。

当 $\delta<0.5^{\circ}$ 时，其影响可被忽略。

对于固定式航炮空中射击，由于射程不太远，V_{01} 较大，δ 不大，故弹丸周期性摆动对质心运动的影响较小，可以忽略不计其影响。

二、偏流现象

在弹道的曲线段，由于非周期偏差的产生、即弹轴向右方（对于右旋弹丸）偏摆，与此相应产生的升力也必然偏向右方，因而造成弹道向右方偏转，偏离射击平面，这就是偏流现象。如图 5-19 所示。由于非周期偏差，也即动力平衡角 δ_P 的存在，在弹丸上产生的升力 R_N 在水平面上的分量 R_z，会使弹丸质心向右方运动，偏出射击面一个 Z 距离。偏流量 Z 与射击起始条件及弹丸类型有关，属于固定偏差。对各种火炮弹丸，在不同射击条件下，可测出后列成表格备查。在陆用远射程火炮射击时，可查表修正。对于航空射击来说，射击距离不远，弹道较直，也不必考虑其修正问题。

① 为考虑诸外力作用时的章动角衰减公式，参见参考文献 [1]第 168 页。

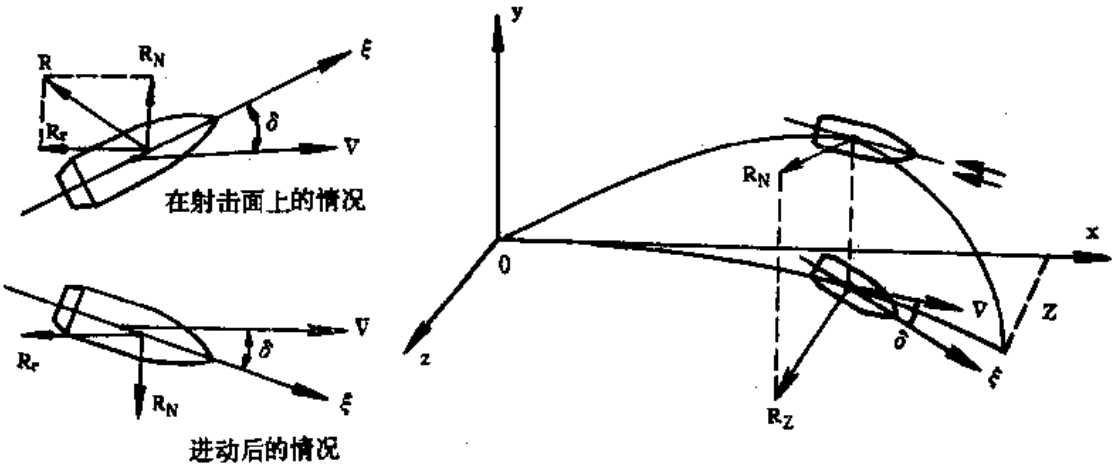


图 5-19　偏流现象图

三、在活动炮塔上向侧方射击时的侧射效应

在轰炸机的活动炮架上向侧方发射旋转弹丸时，因为弹丸炮口初速 $\bar{V}_0$ 与牵连速度 $\bar{V}_1$ 的方向不一致，弹丸合速 $\bar{V}_{01}=\bar{V}_0+\bar{V}_1$ 不在炮管轴线的方向上，使弹丸轴线 ξ 与 $\bar{V}_{01}$ 方向之间产生带偏角 δ_0，如图 5-20 所示。

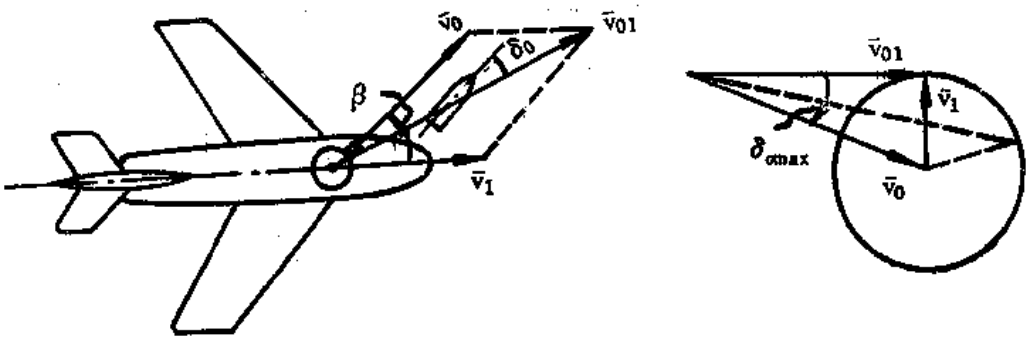


图 5-20　侧射时产生带偏角 δ_0 图

δ_0 的大小与侧射角 β 及飞机速度 V_1 和炮口初速 V_0 有关，由几何关系知：

$$\frac{V_1}{\sin\delta_0}=\frac{V_{01}}{\sin(180^\circ-\beta)},\qquad \text{即}\quad \sin\delta_0=\frac{V_1}{V_{01}}\cdot\sin\beta。$$

而

$$V_{01}=\sqrt{V_0^2+V_1^2+2V_0V_1\sin\beta}$$

由图 5-20 知：

$$\sin\delta_{0\max}=\frac{V_1}{V_0}。$$

当 V_1 很大时，$\delta_{0\max}$ 相当大而不容忽视。

1．时差的产生及修正

由于有 δ_0 角，会产生时间误差 Δt，因为阻力 $R_x=mC(1+k\delta_0^2)\cdot H(y)\cdot G(V,a)\cdot V$，$R_x$ 随 δ_0 而增加，故速度减小，弹丸飞达目标的时间 T 就增大。

设时间比非侧射时增大 δt，则弹丸飞达目标的时间为

$$\left.\begin{aligned} &T=\frac{D}{V_{01}}g_t(C_H D, V_{01})+\delta t \quad \text{参阅（4-16）式} \\ \text{或：}\quad &T=\frac{D}{V_{01}}F_t(C_H D, V_{01}^*, \phi^*)+\delta t \quad \text{参阅（4-75）式} \end{aligned}\right\} \tag{5-49}$$

修正量 δt 的大小与弹丸类型，飞机速度 V_t 及侧射角 β 以及射程 D 有关。由阻力公式 $R_x=mCH(y)G(V,a)V$，在有带偏角 δ_0 时，相当于有初始攻角，则有

$$R_x=mC(1+k\delta_0^2)H(y)\cdot G(V,a)V。$$

令 $C(1+k\delta_0^2)=C^*$，　取 $k\approx 20$，则有

$$\left.\begin{aligned} &R_x=mC^*H(y)G(V,a)V, \\ &T=\frac{D}{V_{01}}g_t(C_H^* D, V_{01}), \\ \text{或}\quad &T=\frac{D}{V_{01}}F_t(C_H^* D, V_{01}^*, \phi^*)。 \end{aligned}\right\} \tag{5-50}$$

上式与（5-49）式的形式完全相同，故有

$$\left.\begin{aligned} &\delta t=\frac{D}{V_{01}}[g_t(C_H^* D, V_{01})-g_t(C_H D, V_{01})], \\ \text{或}\quad &\delta t=\frac{D}{V_{01}}[F_t(C_H^* D, V_{01}^*, \phi^*)-F_t(C_H D, V_{01}^*, \phi^*)]。 \end{aligned}\right\} \tag{5-51}$$

若在高空射击时，则可用高空三头标 $F_{t高}$ 函数代入上式。（参阅第四章§ 3）。

低空时，式中：　$C_*=C(1+k\delta_0^2)$，$V_{01}^*=V_{01}\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}}$，$\phi^*=\frac{\sin\varepsilon\cdot h_{0N}}{C(1+k\delta_0^2)h_H}$。

高空时，式中：　$C^*=C(1+k\delta_0^2)$，$V_{01}^*=V_{01}\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}}$，$\phi^*=\frac{\sin\varepsilon\cdot h_{0N}}{C(1+k\delta_0^2)h_{11}}$。

例如

在 $H=3000$ 米，$V_t=720$ 公里/小时，$\beta=120°$，$D=800$ 米，用 20 毫米口径弹丸侧射时，$V_0=800$ 米/秒，$C\approx 3.39$。

算得：$\delta t=0.28$ 秒。

2．侧射效应偏差

由于带偏角 δ_0，会产生翻转力矩 M_f，它会使弹丸纵轴 ξ 绕 $\bar{V}_{01}$ 矢量进动，并在法向力 R_N 的作用下，使弹丸绕螺线前进，产生侧射效应偏差。

① 翻转力 M_f 产生的效果，使弹轴 ξ 作进动。以自飞机上向水平面左侧方射击为例，这时 $\xi O\eta$ 为水平面，弹丸刚飞出炮口，便受到带偏角 δ_0 的作用而产生空气动力，同前面的道理一样，空气动力包含切向力 R_x、法向力 R_N 和翻转力矩 M_f。在 M_f 的作用下，弹轴 ξ 的进动如图 5-21 所示。包含带偏角 δ_0 的平面，称为带偏平面，也就是阻力平面。

假设：1）弹道在直线段，即不计 g 的作用；2）不计章动角 δ 的变化，即认为 $\delta\approx\delta_0=$ 常数，弹轴绕 $\bar{V}_{01}$ 矢量作正规进动；3）同前面的讨论一样，认为动量矩 $\bar{L}\doteq B\bar{r}_0$，方向同 ξ 轴重合。

由动量矩定理

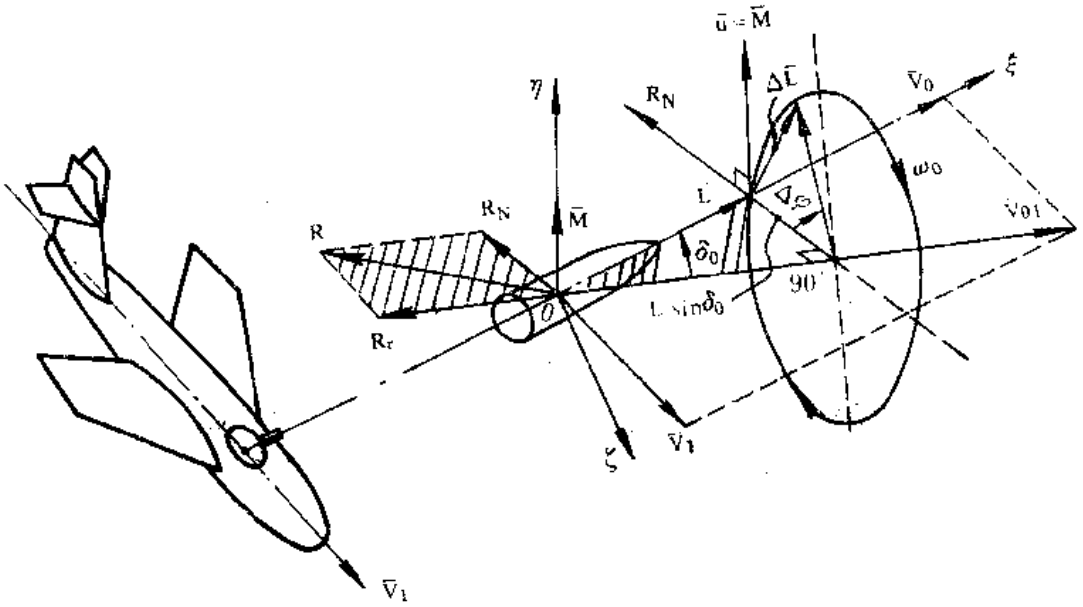


图 5-21　侧射时，弹轴绕速度矢量 $\bar{V}_{01}$ 的进动图

$$\frac{d\bar{L}}{dt}=M_f=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{L}}{\Delta t}$$，如图示 $\Delta L=L\cdot\sin\delta_0\cdot\Delta\varphi$。

故

$$M_f=\lim_{\Delta t\to 0}L\cdot\sin\delta_0\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=L\cdot\sin\delta_0\cdot\omega_0\ 。$$

即　　$M_f=\bar{u}=\rho_1\cdot\omega_0$，　ρ_1 为进动园半径。

则

$$\omega_0=\frac{M_f}{L\cdot\sin\delta_0}\tag{5-52}$$

ω_0 为弹轴 ξ 绕 V_{01} 矢量进动的旋转角速度，带偏平面绕 $\bar{V}_{01}$ 矢量作进动，而翻转力矩 M_f 矢量则始终垂直于带偏平面，法向力 R_N 始终在带偏平面内。因此它们都随弹轴 ξ 进动，在空间以角速度 ω_0 不断改变方向，如图 5-21 所示。

② 法向力 R_N 产生的效果，产生螺线弹道和侧射偏差角。

设发射瞬间，$\bar{V}_{01}$ 位于水平平面 π 上，如图 5-22 所示。弹丸上由于 δ_0 的存在，所产生的 M_f 和 R_N 都在空间绕 $\bar{V}_{01}$ 矢量作 ω_0 角速度的进动。弹丸在 $\bar{R}_N$ 的作用下，沿 $\bar{R}_N$ 的方向产生运动加速度。设在 Δt 时间内，由 $\bar{R}_N$ 而引起弹丸速度的改变量为 $\Delta\bar{V}_N$，因此经 Δt 时间后，弹丸的速度为 $\bar{V}_{合}$，$\bar{V}_{合}=\bar{V}+\Delta\bar{V}_N$。由于 $\bar{R}_N$ 随着弹丸的进动而不断在空间改变它的方向，所以 $\bar{V}_{合}$ 在空间也不断改变其方向。假设，弹丸在空间作正规进动，$\bar{V}_{合}$ 在空间的方向恰好象是一个躺在水平面上方的圆锥上的母线。可用图 5-22 来比拟。

在空间不断变化方向的弹丸速度 $\bar{V}_{合}$，可以等效为一个沿圆锥体中轴线方向的平均速度 $\bar{V}''$和一个沿圆锥体底面半径而绕中轴线旋转的分速度 $\bar{V}'$ 的合成，即

$$\bar{V}_{合}=\bar{V}+\Delta\bar{V}_N=\bar{V}''+\bar{V}'\tag{5-53}$$

$\bar{V}''$ 保持大小、方向不变，而 $\bar{V}'$ 的大小不变，但方向随弹丸的进动而改变。平均速度 $\bar{V}''$ 的方向与初速度 $\bar{V}_{01}$ 间的夹角为 θ。由图 5-22 知。

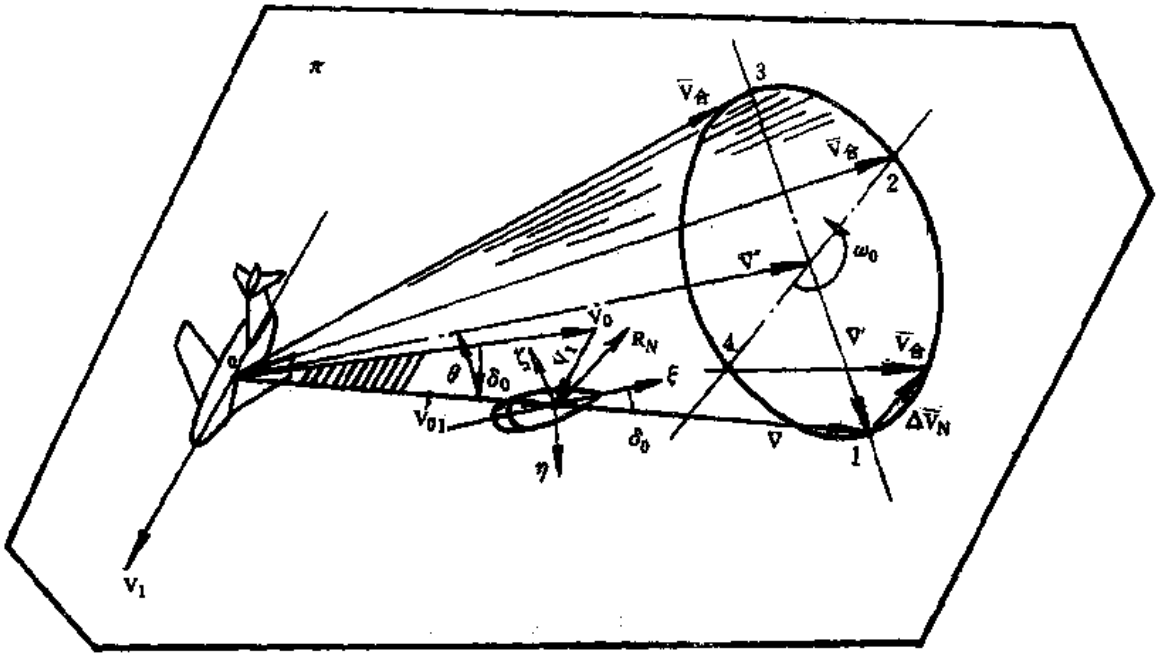


图 5-22　圆锥比拟图

$$\theta \approx \sin\theta = \frac{V'}{V_{01}} \quad 。 \tag{5-54}$$

把图 5-22 所示圆锥母线上 1，2，3，4 四个典型位置的 $\overline{V}_{合}$ 矢量按先后顺序相加在一起，如图 5-23 所示的正视和顶视图。可看出平均速度 V'' 矢量方向与初始速度 V_{01} 矢量方向间的夹角为 θ，即弹丸向着与 V_{01} 方向夹角为 θ 的方向飞行。称 θ 角为侧射偏差角。当所取的时间间隔无限小时，$\overline{V}_{合}$ 矢量方向的变化就是一条光滑的螺旋曲线。因此，弹丸质心运动轨迹，是一条中心线向上偏离一个 θ 角的螺旋曲线（对右旋弹丸向左方射击，是向上偏离；向右方射击，则向下偏离）。称为螺线弹道。

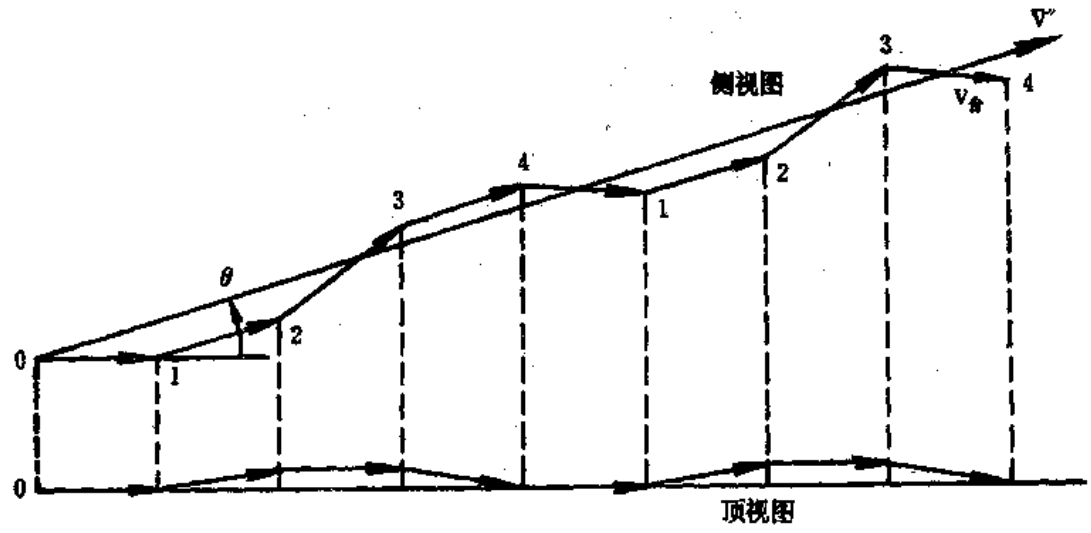


图 5-23　四个典型位置的 $\overline{V}_{合}$ 相加图

螺旋线弹道绕中心线的旋转角速度为 ω_0，螺管半径为 ρ，螺管中心线偏离初速度 $\bar{V}_{01}$ 矢量的夹角为侧射偏差角 θ。

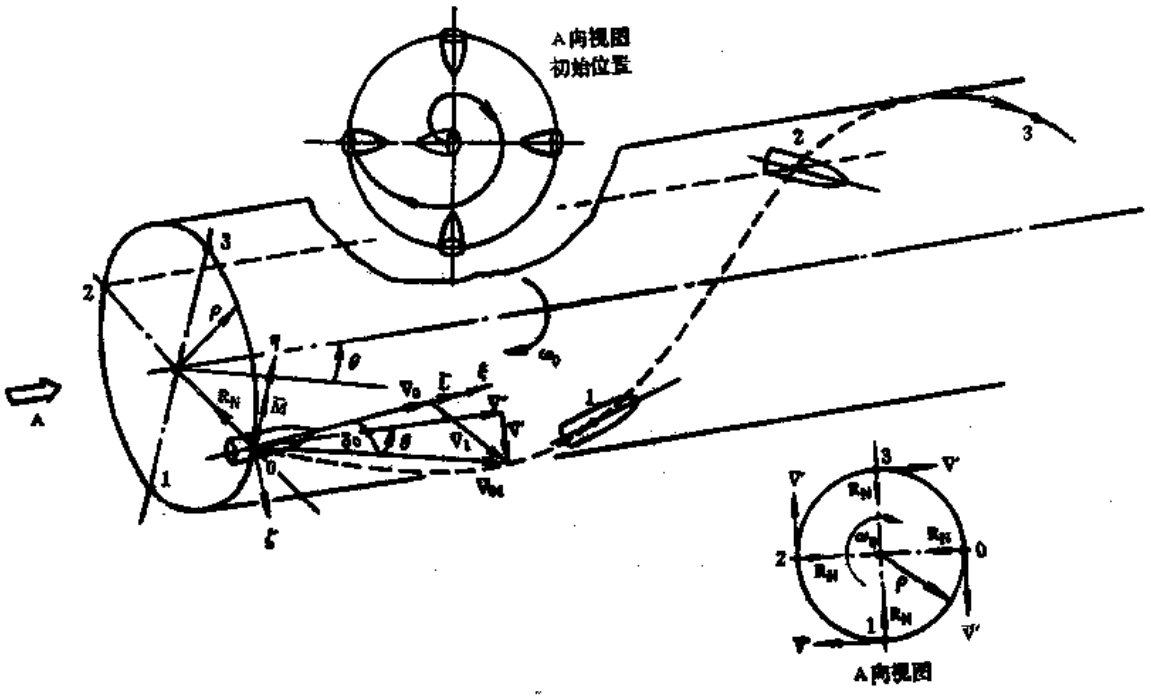


图 5-24　螺线管状弹道图

自螺线管后端向前方看去，弹丸质心的运动轨迹是一个园，弹丸由起始位置 O 起，顺时针方向转动，分速度 V' 及法向力 R_N 的方向，就象是一根绳子的一端捆着一个质量为 m 小球，另一端握在人手中旋转时一样，绳子的张力（即向心力 R_N）使小球绕人手作园周运动，切线速度为 V'。故弹丸质心轨迹是一个右旋前进的螺线管，如图 5-24 所示。

判断侧射偏差角 θ 产生的方向是：对于右旋弹丸，向飞机前进方向的左方射击，θ 角偏离在 $\bar{V}_{01}$ 的上方；向右方射击，则 θ 角偏离在 $\bar{V}_{01}$ 的下方（若对于左旋弹丸，则结论恰好相反）。可用如图 5-25(a) 的方向来表示，自机尾向机头方向看，侧射偏差角 θ 自 $\bar{V}_{01}$ 方向顺时针偏离。

3．侧射偏差量的计算

① 侧射偏差量 η_C　由于 θ 不太大，故如图5-25(b) 所示，有

$$\eta_C \doteq \theta D = \frac{V'}{V_{01}} \cdot D \quad （参阅(5-54)式）$$

由理论力学知：弹丸质心绕螺线管旋转的

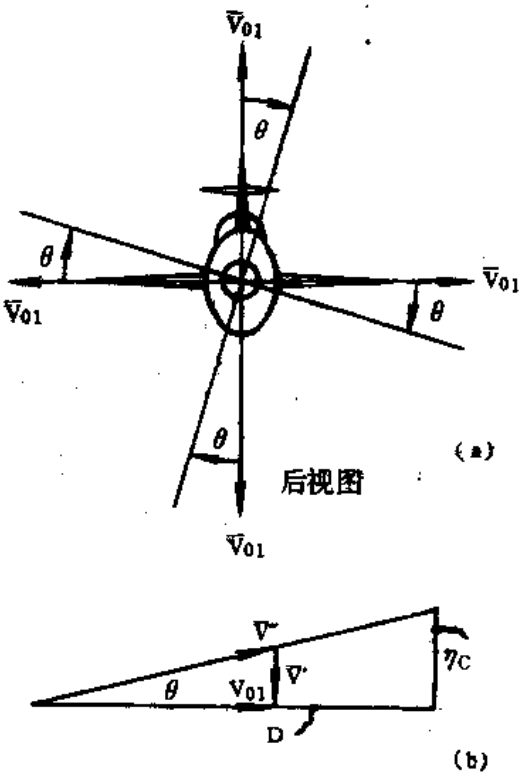


图 5-25　判断侧射偏差角 θ 的方向图
(a) 判断 θ 的方向
(b) 计算偏差量 η_c 的大小

法向加速度为

$$j_N = \frac{V'^2}{\rho} = V' \omega_0 = \frac{R_N}{m}。$$

故
$$V' = R_N/(m \cdot \omega_0), \tag{5-55}$$

而
$$\omega_0 = \frac{M_f}{L \cdot \sin\delta_0} \quad （参阅(5-52)式）。$$

$$M_f = -\frac{d^2 h}{g} 10^3 \cdot H(y) V^2 \cdot K_m(M) \cdot \delta_0 \quad （参阅(5-15)式）。$$

$$R_N = \frac{dl}{g} \cdot 10^3 \cdot H(y) V^2 \cdot K_N(M) \cdot \delta_0 \quad （参阅(5-10)式）。$$

代入 (5-55) 式，得

$$V' = \frac{Ll}{mh} \cdot \frac{K_N}{K_m} \cdot \frac{\sin\delta_0}{d}。$$

故

$$\eta_C = \frac{V'}{V_{01}} \cdot D = \frac{1}{V_{01}} \frac{l}{h} \frac{K_N}{K_m} \cdot \frac{L}{m} \cdot \frac{\sin\delta_0}{d} \cdot D。$$

令

$$a_1 = \frac{1}{V_{01}} \frac{l}{h} \cdot \frac{K_N}{K_m}, \tag{5-56}$$

一般弹丸经测量实验，算得 a_1 如下表。

V_{01} [m/sec]	600	700	800	900	1000
$a_1 \times 10^2$ [sec/m]	0.21	0.19	0.175	0.16	0.144

而 $L = Br_0$，$r_0 = \frac{2\pi V_0}{\eta d}$，$B = m \cdot \mu \cdot \frac{d^2}{4}$，代入 η_C 中，

得

$$\left.\begin{aligned} &\eta_C = \frac{\pi a_1 \mu}{2\eta} \cdot D \cdot V_0 \cdot \sin\delta_0, \\ \text{或}\quad &\overline{\eta}_C = \left(\frac{\pi a_1 \mu}{2\eta}\right) \cdot D \cdot \frac{\overline{V}_1 \times \overline{V}_0}{V_{01}} \quad （用矢积表示 \overline{\eta}_C 的方向）。 \end{aligned}\right\} \tag{5-57}$$

式中：η 为炮管缠度；μ 为质量分布系数；

D 为射击距离；

δ_0 为带偏角；$\sin\delta_0 = \frac{V_1}{V_{01}} \cdot \sin\beta$，$\beta$ 为侧射角。

② 侧射偏差角 θ 的计算

由 $\theta \doteq \frac{\eta_C}{D}$ 得

$$\theta = \frac{\pi}{2} \frac{a_1 \mu}{\eta} V_0 \cdot \sin\delta_0 = \frac{\pi}{2} \frac{a_1 \mu}{\eta} \cdot \frac{V_0 V_1}{V_{01}} \sin\beta。 \tag{5-58}$$

若用矢量积表示，则还可用下式表示 θ 角的方向及大小，

$$\bar{\theta}=\frac{\pi}{2}\frac{a_1\mu}{\eta}\frac{\bar{V}_1\times\bar{V}_0}{V_{01}}\ 。 \tag{5-59}$$

③ 螺线管半径 ρ 的计算

由图 5-24 及 (5-55) 式知

$$\rho=\frac{V'}{\omega_0}\approx\frac{R_N}{m\omega_0^2},$$

将 (5-52) 式 ω_0 值代入得

$$\rho=\frac{R_N}{mM_f^2}L^2\cdot\sin^2\delta_0\ 。 \tag{5-60}$$

④ θ 及 ρ 的近似计算式

若认为翻转力矩 M_f 及法向力 R_N 近似与带偏角 δ_0 的正弦值成正比，即

$$\left.\begin{aligned}M_f&=a_2\cdot\sin\delta_0,\\R_N&=a_3\cdot\sin\delta_0\ 。\end{aligned}\right\} \tag{5-61}$$

把上值代入 $V'=\frac{R_N}{m\cdot\omega_0}$、$\rho=\frac{R_N}{m\cdot M_f^2}L^2\cdot\sin^2\delta_0$ 和 $\omega_0=\frac{M_f}{L\cdot\sin\delta_0}$ 中，得

$$\theta=\frac{V'}{V_{01}}=\frac{a_3\sin\delta_0}{V_{01}m\omega_0}=\frac{a_3\cdot L}{a_2mV_{01}}\sin\delta_0\ 。$$

令 $A_1=\frac{a_3L}{a_2mV_{01}}$，$A_1$ 与弹丸类型无关，对于类似的航炮弹丸，A_1 值大致相等，其值近似为 $A_1=(3\sim4)\times10^{-2}$ 。

故

$$\theta=A_1\sin\delta_0\ 。 \tag{5-62}$$

而

$$\rho=\frac{R_N}{m\cdot M_f^2}L^2\cdot\sin^2\delta_0=\frac{a_3\sin\delta_0\cdot L^2}{m(a_2\sin\delta_0)^2}\cdot\sin^2\delta_0=\frac{L^2\cdot a_3}{ma_2^2}\cdot\sin\delta_0\cdot$$

令

$$A_2=\frac{L^2\cdot a_3}{ma_2^2},$$

A_2 大致与弹丸直径 d 成正比而与 $H(y)$ 成反比，即

$$A_2=A_2'\frac{d}{H(y)}，\text{式中 } d \text{ 以毫米为单位。}$$

航空弹丸可近似认为 $A_2'=(1.1\sim1.7)\times10^{-2}$。

则

$$\rho=A_2\cdot\sin\delta_0=A_2'\frac{d}{H(y)}\cdot\sin\delta_0 \tag{5-63}$$

例 5-1　使用 23-× 航炮，$V_0=700$ 米/秒，$V_1=720$ 公里/小时，$H=4000$ 米，在最大偏角 δ_{0max}、$D=1500$ 米时，计算侧射偏差量 η_c、侧射偏差角 θ 及螺线管半径 ρ。

解　23-×型弹丸 $\delta_{0max}=\sin^{-1}\frac{V_1}{V_0}$，$\sin\delta_{0max}=\frac{V_1}{V_0}=0.286$，$H(y)\doteq H(4000)=0.668$，取 $A_1=3.5\times10^{-2}$，$A_2'=1.4\times10^{-2}$，

则：　$\theta=A_1\sin\delta_{0max}=3.5\times0.286\times10^{-2}=0.010$ 弧度$\doteq$34 分

$\eta_c=\theta\cdot D=0.01\times1500=15$ 米

$$\rho = A_2^1 \frac{d}{H(y)} \cdot \sin \delta_0 = 1.4 \times 10^{-2} \times \frac{23}{0.668} \times 0.286 = 0.137 \text{ 米}$$

从上例看出，侧射时必须修正侧射偏差角 θ，才能命中目标。

最后由于 δ_0 不能保持为常量，在弹丸飞行过程中弹轴也有章动运动，所以 δ 是变化的。故按 δ_0 = 常数所计算出的侧偏修正角 θ 可看作一个平均修正值，由于章动作用，使弹着点在瞄准点周围形成散布。

第五章 习 题

5-1 设有一旋转弹丸，它的自转角速度不是由于膛线和导带的作用而产生，试用旋转稳定理论直接导出它具有足够稳定性时的 r_0 公式。

5-2 已知 37 毫米弹丸的参数为：$d = 0.037$ 米，$q = 0.72$ 公斤，$A = 1.13 \times 10^{-4}$ 公斤·米·秒^2，$\alpha = \frac{Br_0}{2A} = 240$ 弧度/秒，$V = 820$ 米/秒，$\delta_m = 10°$，$T = \frac{2\pi}{\alpha\sqrt{\sigma}} = 5.3 \times 10^{-2}$ 秒，$h = 0.058$ 米，试求翻转力矩特征数 $K_m(\bar{V})$ 及章动波长 λ。

5-3 同上题条件、设质量分布系数 $\mu = 0.6$，$V_0 = 700$ 米/秒，$V_{01} = 1050$ 米/秒，试求保证弹丸稳定飞行时，炮管的缠度 η。

5-4 同上题条件，求弹道上动力平衡角的最大值 δ_{Pm}。

5-5 当 $D = 1000$ 米，$V_1 = 900$ 公里/小时，$\beta = 120°$，$C = 1.67$，$V_0 = 800$ 米/秒时。试用 (5-51)①式求侧射时的时差 δt。

5-6 某 23 毫米弹丸向左侧方水平射击时，条件与上题相同，且 $\mu = 0.6$，缠度 $\eta = 25$，试用 (5-57)、(5-58) 式求侧射偏差量 η_0 及侧射偏差角 θ，并判定侧射偏差的方向。

第六章　摆动稳定理论

§1　引　　言

尾翼式弹丸是靠尾翼而稳定飞行的。如同气象站的风标尾翼一样，尾翼弹丸的尾翼起着控制弹体方位的作用。只要尾翼设计得好，就可保证弹轴与速度矢量间的夹角（即攻角）δ在一个很小的范围内变化。就全弹而言，尾翼弹所产生的空气动力的合力作用点（即压力中心或阻心），位于质心的后方。这样所产生的空气动力矩，会起减少攻角的作用。也就是说，空气动力矩力图使弹轴ξ向速度方向靠拢。这就是尾翼弹丸能达到飞行稳定的根本原因。如图 6-1 所示。这种使弹丸稳定飞行的力矩，就称为稳定力矩M_z。

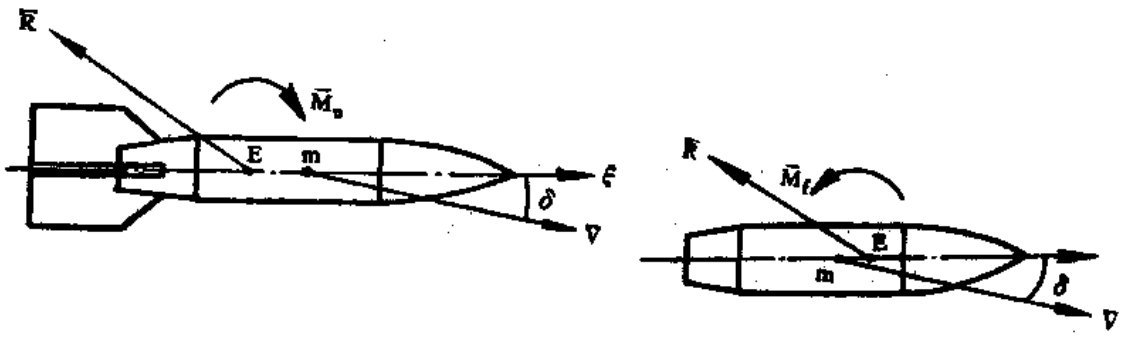


图 6-1　尾翼弹丸的稳定飞行图

空军使用的尾翼式弹丸，就其摆动稳定性来说，可分为有推力的（例如火箭弹的主动段）和无推力的（例如火箭弹的被动段和炸弹）两种类型。前者因为有推力，会产生推力偏心力矩及推力侧向分力，致使其摆动稳定过程比后者要来得复杂，而且会造成弹丸速度方向偏离理想弹道的速度方向，使弹着点造成更大的散布。因此本章着重讨论尾翼式火箭弹主动段的摆动稳定性，也附带讨论无动力段（即被动段）的摆动稳定性。

目前无控火箭弹的散布较大，这是一个突出的问题。由于主动段内推力很大，即使攻角不大，也将产生一定的推力侧向分量，使质心速度方向发生变化。就全弹道而言，尽管主动段比被动段短得多，但就形成弹着点总散布而言，主动段的散布占主导地位。而且由于主动段扰动因素的作用，使火箭速度方向发生角偏差（偏离理想弹道速度方向），在主动段末K点，使实际速度V_K的方向偏离。这就相当于在K点发射一发改变了速度方向的弹丸一样，使弹着点偏离予定点。因为扰动因素是随机的，从而造成弹着点的散布。

尾翼式火箭弹与涡轮式火箭弹相比，主要优点是弹体可做得长些，因此射程远些，威力也可大些。而涡轮式火箭弹是靠高速旋转的陀螺效应来保证其飞行稳定性的，一般说来，其密集度要比摆动稳定式的弹丸高。目前尾翼式火箭弹多采用低速自转，以使一些不对称因素（如推力偏心力矩等）不致于总是作用在一个方向上，从而使各相反方向上的作用尽可能抵消一部分，以提高密集度（减少散布）。本章所研究的不旋转火箭弹的摆动稳定理论，仍有

其基本的实际和理论的意义。

一、火箭弹发射时的初始状态

初始状态与火箭弹在弹道上的摆动，有密切的关系，主要的有下列初始状态。

1．起始扰动　在火箭弹的后定心部脱离滑轨瞬间，火箭弹围绕着通过质心且垂直于纵轴 ξ 的侧向轴作横向摆动。如以 φ 表示弹轴 ξ 与某一基准线的夹角，则离轨瞬间，火箭弹的摆动角速度以 $\dot{\varphi}_0$ 表示，称为起始摆动角速度。此外，火箭弹后定心部离滑轨瞬间的质心速度，称为初速度 V_0，弹轴的方向与 V_0 的方向间的夹角以 δ_0 表示，称为起始攻角。如以滑轨方向为基准，则 δ_0 的产生，或因弹轴偏离滑轨方向，或因 V_0 偏离滑轨方向。而因飞机带攻角飞行、发射架的安装角、发射时的振动、滑轨的波纹度以及弹、轨间的间隙、弹体质量分布不对称等原因，都会造成 δ_0 及 $\dot{\varphi}_0$ 的产生，统称为起始扰动。

2．推力偏心　推力作用线偏离火箭弹质心（不管质心是否在弹体几何纵轴上）的距离，用 Δ 表示，称为推力偏心距。由此而形成一个推力偏心力矩，致使弹轴摆动。而当推力作用线不平行于弹体轴线时，其间有一个小的偏角，以 γ 表示，称为推力偏心角，如图 6-3 所示。由此可产生垂直于弹轴的推力侧向分力，它是引起散布的原因。对于低速自转火箭而言，则这个因素大为降低而可以忽略不计。

3．横风　离轨瞬间火箭弹遇到了一股横向气流，造成相对气流方向的改变，引起空气动力的改变，从而使火箭弹离开理想弹道的方向。

此外，弹体外形的不对称性，产生了气体动力偏心，发射（投放）时，机翼（或机身）流场的干扰以及作垂直于弹轴方向的弹射投放等原因，都会产生不同的初始状态。对弹道都会产生不同程度的影响。

二、坐标轴系的选用

讨论尾翼式弹丸的空间运动，常选用一个惯性坐标轴系 $Oxyz$ 和一个动坐标轴系 $O\xi\eta\zeta$，

定义惯性坐标轴系的原点 O 在弹丸质心 m 上，$\overrightarrow{Ox}$ 轴在水平面内指向前方，$\overrightarrow{Oy}$ 轴在铅垂平面内指向上方，与 Ox 轴相垂直，$\overrightarrow{Oz}$ 轴按右手定则，垂直于 Oxy 平面指向右方。因此惯性坐标轴系随弹丸质心作移动但不作转动。它与地面静参考系的关系是随火箭弹质心在空间作平移。

定义弹体坐标轴系 $O\xi\eta\zeta$ 作为动坐标轴系，原点 O 在弹丸质心 m 上，$\overrightarrow{O\xi}$ 在弹体纵轴上指向弹尖，$\overrightarrow{O\eta}$ 在铅垂平面内，与 $\overrightarrow{O\xi}$ 相垂直指向上方，$\overrightarrow{O\zeta}$ 在水平平面内，指向右方。因此动坐标轴系随弹丸在空间改变姿态而摆动，但不随火箭弹体绕纵轴 ξ 自转而旋转。两轴系的关系如图 6-2 所示。

假如火箭弹某时刻在空间的位置为 $O\xi\eta\zeta$，其速度 $\vec{V}$ 在弹道切线上，$\vec{V}$ 并不一定与 $\overrightarrow{O\xi}$ 重合。对着惯性坐标系的 Oz 轴的反方向看去，如图 6-2(a) 所示，弹体轴 $\overrightarrow{O\xi}$、$\overrightarrow{O\eta}$ 在惯性轴系 OXY 平面内的投影为 $O\xi_0$、$O\eta$。速度 V 在 OXY 平面内的投影为 V_0，定义 V_0 的方向轴为 x' 轴。对着包含速度矢量 $\vec{V}$ 和 OZ 轴的倾斜平面 S 看过去，如图 6-2(b) 所示。这时弹体轴系是在惯性轴系的基础上绕 Oz 轴转动一个 φ_c 角（称纵向摆动角），再绕 $O\eta'$ 轴转动一个 φ 角（称侧向摆动角），使火箭到弹达图 6-2(b) 的位置，纵向摆动角 φ_c 是弹道切线倾角 θ 与攻角在铅垂平面 C 内的投影量 δ_c 之和，侧向摆动角 φ 是攻角 δ 在倾斜平面 S 内的

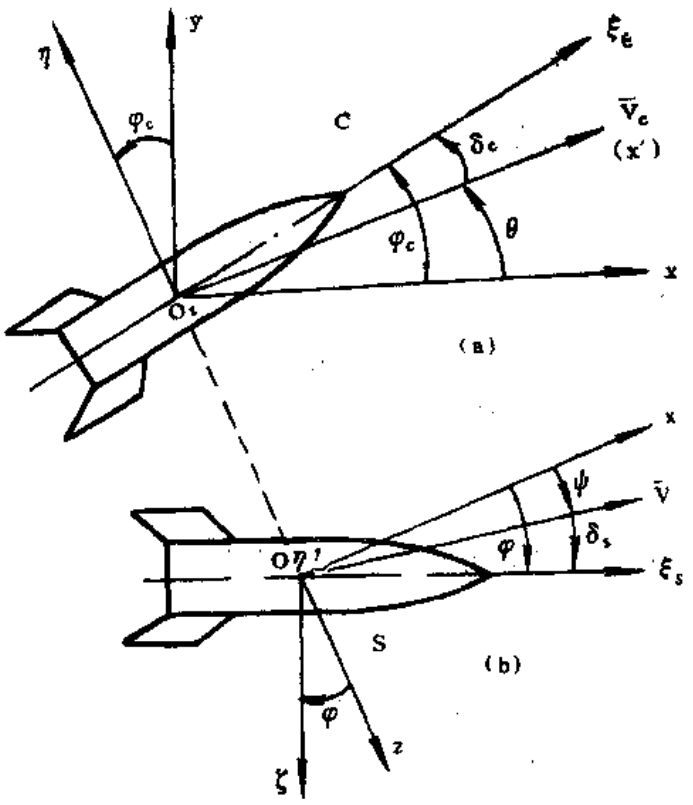


图 6-2 惯性坐标系 $Oxyz$ 与动坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 的关系图

(a) 在铅垂平面C内的投影　　(b) 在倾斜平面S内的投影

投影分量δ_s和弹道偏角ψ之和，参阅图6-12。(称弹道切线在C平面内的射影$\bar{V}_c$与水平平面的夹角为弹道切线倾角θ，称弹道切线与惯性坐标系的铅垂平面间的夹角为偏角ψ)。在铅垂平面内的角量，约定以向上转动为正方向。在倾斜平面内的角量，约定以顺时针转动为正向。

§2 作用在尾翼式弹丸上的力和力矩

下面的讨论，以无自转火箭弹主动段弹道作为典型例子。对于被动段弹道，则推力及推力矩为零。炸弹弹道则与被动段火箭弹一样。

为使问题不致太复杂，我们略去一些次要因素，例如假定没有风，弹体外表是轴对称的，等等。

一、推力及其分力和推力矩

由于制造上的技术原因及公差，使弹体质量分布不对称，战斗部和发动机的轴线不相重合，造成质心偏离弹轴，使喷出气流的作用线不通过质心，称为推力的几何偏心；而由于喷管的设计制造公差及装药不均匀，使喷出气流不对称于弹轴，造成推力偏离弹轴，称为推力的气体动力偏心。以致形成推力T偏离弹丸的几何轴线，如图6-3所示。推力通过发动机喷管中心与弹轴夹一个很小的偏角γ。

则推力的轴向分力为

$$P = T \cdot \cos\gamma \text{ 。}$$

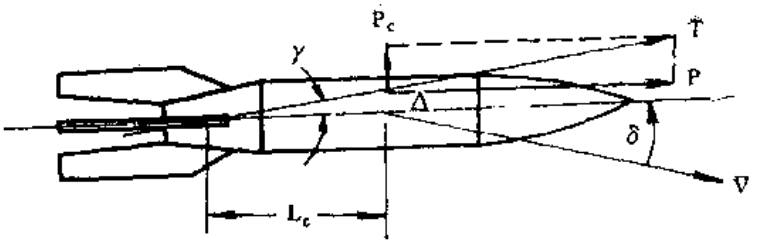


图 6-3　推力和推力矩图

推力的侧向分力为

$$P_C = T\sin\gamma \text{ 。}$$

由于 γ 很小，故　$\cos\gamma \doteq 1$，$\sin\gamma \doteq \gamma$，

$$\therefore \quad P \doteq T$$

$$P_C \doteq T \cdot \gamma$$

推力作用线不通过质心，由理论力学知道，可以把推力搬移至质心位置并附加一个推力矩 M_P。则

$$M_P = T\,\Delta \approx P \cdot \Delta \text{ 。} \tag{6-1}$$

式中：Δ 为推力作用线偏离质心的距离。

当弹轴与速度矢量不相重合，也即存在攻角 δ 时，常将推力分解为法线分量及切线分量：

切线分量　　$P_x = P \cdot \cos\delta - P_C\sin\delta$ 。

由于 δ 较小，$\sin\delta \approx \delta$，而 P_C 也较小，故可近似认为

$$P_x = P \cdot \cos\delta \text{ 。} \tag{6-2}$$

法线分量

$$P_N = P \cdot \sin\delta + P_C\cos\delta \text{ 。}$$

或　$P_N \approx P\delta + P_C$ 。　　(6-3)

二、空气动力诸分力及其力矩

尾翼式弹丸在有攻角 δ 时，所产生的空气动力 R，自合力作用点——压力中心 E 搬移至质心 m 后，也产生一个附加力矩，此力矩的作用是力图减小攻角，使弹轴追随速度矢量的方向，起到飞行稳定的作用，故称为稳定力矩 M_z，如图 6-4 所示。作用在质心上的空气动力可以分解为弹道切线方向上的阻力 R_x，及法向方向上的升力 R_N（R_x 有时表为 R_a，R_N 有时

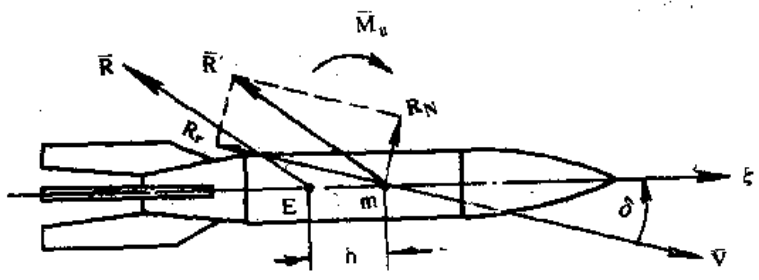


图 6-4　空气动力的分力及稳定力矩图

表为 R_y）。阻力 R_x 的作用是使弹丸减速，升力 R_y 的作用是使弹丸的速度改变方向，稳定力矩 M_z 的作用是使弹轴与速度矢量的夹角 δ 减少，但也由于惯性而引起摆动作用。

当弹轴以角速度 $\dot{\varphi}$ 摆动时，由于空气的阻尼作用。产生一个阻碍弹轴摆动的阻尼力矩，称为赤道阻尼力矩 M_D，M_D 的方向始终与 $\dot{\varphi}$ 的方向相反。

各力和力矩的表达式，由空气动力学知

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \frac{1}{2}\rho V^2 S C_x(M,\delta), \\ R_y &= \frac{1}{2}\rho V^2 S C_y(M,\delta), \\ M_z &= \frac{1}{2}\rho V^2 S l\, C_m(M,\delta), \\ M_D &= \frac{1}{2}\rho V^2 S l\, C_D(M,\delta)。 \end{aligned}\right\} \tag{6-4}$$

式中：S 为弹丸最大横截面积；ρ 为空气密度；l 为弹丸特征长度；$M=V/a$ 是马赫数。

$C_x(M,\delta)$ 是攻角不为零时的阻力系数，它是 M 和 δ 的函数，当 δ 较小时，阻力系数可表为

$$C_x(M,\delta)=C_{x0}(M)\cdot(1+k\delta^2)。 \tag{6-5}$$

其中 $C_{x0}(M)$ 为攻角 $\delta=0°$ 时的阻力系数，k 为计算系数。对不同弹丸，k 值是不同的，一般弹丸 $k=15\sim30$ 之间，C_x 与马赫数和攻角 δ 的关系如图 6-5 所示。

因为弹丸是轴对称体，所以函数 C_x 对于 δ 也是对称的。当 $\delta\leqslant2°\sim3°$ 时，C_x 受 δ 的影响不大。当 $\delta>3°$ 时，C_x 增长较快，实验证明 C_x/C_{x0} 值与 δ 的关系如下表所示。

δ	0°	3°	5°	10°	15°
C_x/C_{x0}	1	1.05	1.11	1.47	2.12

(6-4)式中的 $C_y(M,\delta)$ 是升力系数，它也是 M 和 δ 的函数，当 $\delta<6°\sim8°$ 时，C_y 与 δ 近似成线性关系，如图 6-6 所示。这时，C_y 可用其对 δ 的导数表示。

$$C_y(M,\delta)=C_y'(M)\cdot\delta。 \tag{6-6}$$

导数 $C_y'(M)$ 是 M 的函数，当 $\delta<6°\sim8°$，M 数一定时，C_y' 近似为常数。C_y' 与弹丸的尾翼结构、形状及尺寸有关。

由于尾翼的存在，使弹丸的升力 R_y 增大

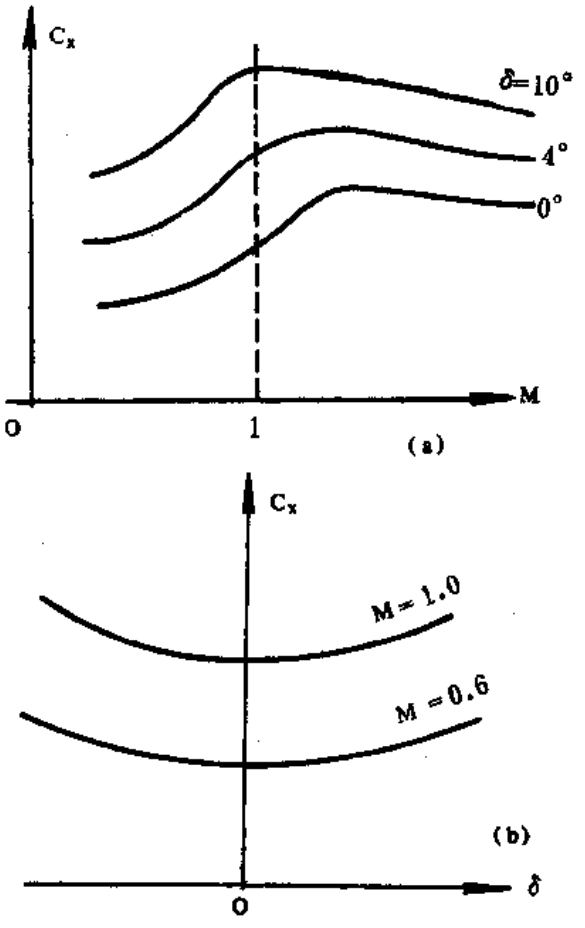


图 6-5 阻力系数 C_x 与攻角 δ、M 数及 δ 之间的关系图

(a) C_x-M 关系图　(b) C_x-δ 关系图

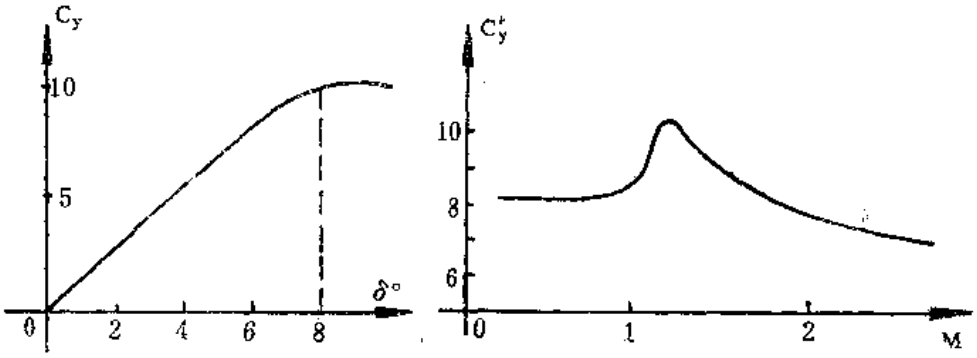


图 6-6 $C_y-\delta$ 及 $C_y^\delta-M$ 关系图

很多。根据实验，有尾翼与无尾翼同样的弹形，前者的升力约增大 8～10 倍。这也是有尾翼弹比无尾翼弹散布增大的主要原因。为了减少散布，设计尾翼弹丸时，应使其升力尽量地减少。

根据实验，可定性地得出结论：用增大翼展D的办法来增大 C_y^δ，比用增大翼弦长 b 的办法更有效得多。例如将尾翼弦长 b 增大至 1.5 倍时，C_y^δ 只增大 12.5 %；而将尾翼展D增大至 1.5 倍时，C_y^δ 可增大 100%；当尾翼片数超过 6 片时，对 C_y^δ 的增大不甚显著，但 C_{z_0} 却显著增加；在超音速飞行时 C_y^δ 值随M数增大而减少。

由上述结论可知，为了减少 $C_y^\delta(M)$（即减少升力，以减少散布）尾翼的弦展比 b/D 越大越有利。

(6-4) 式中稳定力矩 M_z 的矩矢量方向和 δ 角矢量方向相反。l 为弹丸特征长度，在 $\delta<6°\sim8°$ 时，力矩系数 $C_m(M,\delta)$ 对 δ 具有线性关系，故可表为

$$C_m(M,\delta)=C_m^\delta(M)\cdot\delta \quad 。 \tag{6-7}$$

当M数一定时，$C_m^\delta(M)$ 近似为一常数。系数 C_m 的数值随 C_y^δ 和力臂 h（即二心距）以及阻力系数 C_x、攻角 δ 而改变，如图 6-7 所示，因而 C_m^δ 也与尾翼结构形式、尾翼面积大小、片数及弦展比 b/D 有关。

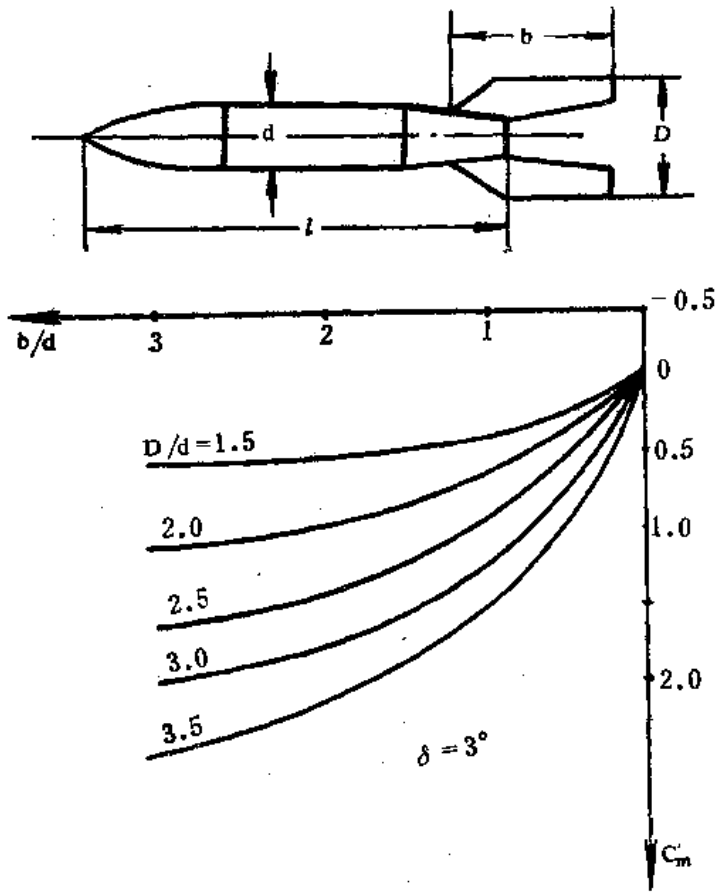


图 6-7 火箭弹结构参数与 C_m^δ 的关系图

由图 6-4 可知

$$M_z=R_y\cdot h\cdot\cos\delta+R_x h\cdot\sin\delta\doteq R_y h+R_x h\delta 。$$

将（6-4），（6-6）和（6-7）式之值代入上式，得

$$C_m' = \frac{h}{l}(C_y' + C_x)。 \tag{6-8}$$

令比值$\frac{h}{l} = \eta$，称为尾翼弹丸的“稳定储备量”，

由（6-8）式得

$$\eta = \frac{h}{l} = \frac{C_m'}{C_y' + C_x},$$

在多数情况下，$C_y' \gg C_x$，近似可得

$$\eta = \frac{h}{l} = \frac{C_m'}{C_y'} \tag{6-9}$$

显见稳定储备量是M数的函数，超音速时，压心位置要向前移，二心距将减少。由图6-8所示，在尾翼弹丸所有可能运动速度范围内，若能保证压心位置E始终位于质心m的后面，则整个M数范围内，h为正，$\eta > 0$，表示着$C_m' > 0$。这种弹丸称为静稳定的。否则就称为静不稳定的。为了保证尾翼式弹丸的静稳定性。一般要求在整个M数范围内，必需$\eta = h/l > 0$，且应在0.10～0.20之内，但最小不得小于0.05，太小则弹丸飞行时摆动太厉害，散布也会增大。

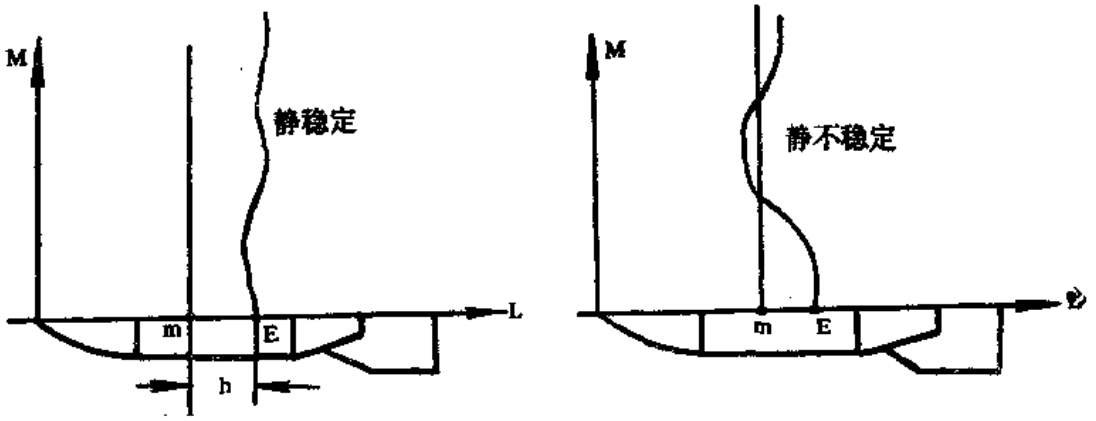


图 6-8　压心E位置的变化与稳定关系图

C_m'随M数的变化规律，如图6-9所示。在$M < 0.7$时，可视为常数。

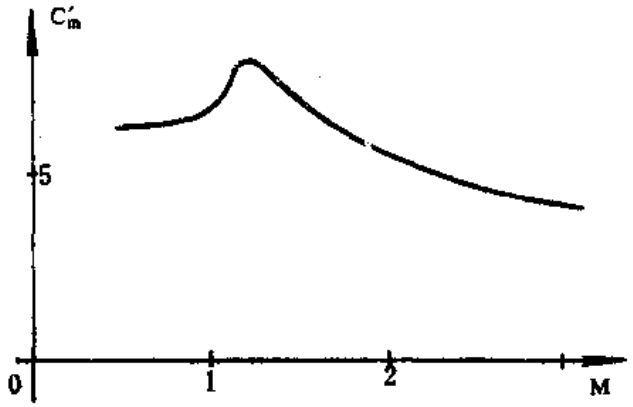


图 6-9　稳定力矩系数导数与M数关系$C_m' - M$图

当尾翼弹丸的尾翼面积或片数不够时，它在δ角较小时产生了翻转力矩（即压心在质心之前）；而当δ增大到某一数值δ^*时，尾翼的稳定作用才显现出来，也即这时C_m'由负值转变为正值。我们称这一类弹丸为尾翼“强度”不足的弹丸，如图6-10所示。弹丸将围绕$2\delta^*$摆动，因而会造成弹丸更大的散布。

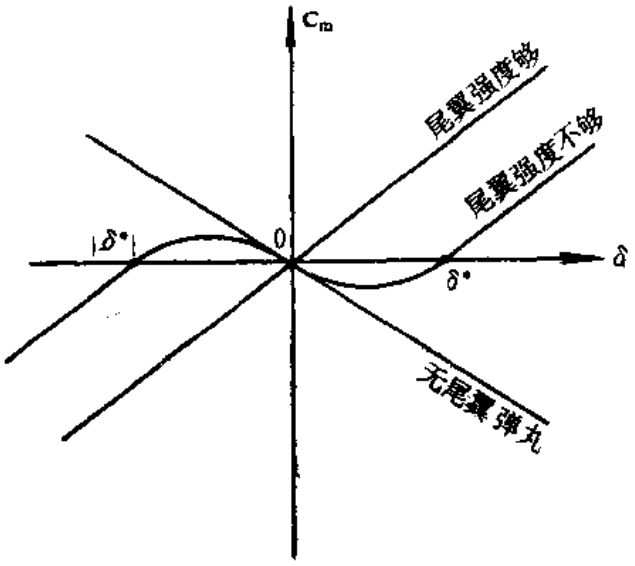


图 6-10 尾翼“强度”与摆动的关系图

(6-4)式中的$C_D(M,\delta)$，称为赤道阻尼力矩系数，可表为

$$C_D(M,\delta)=C_D'(M)\cdot\frac{l\dot{\varphi}}{V}\ 。\tag{6-10}$$

$C_D'(M)$称为阻尼力矩系数导数，它与M的关系如图6-11所示，其值与弹形，尾翼面积及片数和形状等因素有关，在$M<0.7$时，C_D'的数值变化幅度不太大，约在0.4～1.5之间。对于具体弹丸，可近似为常数。超音速时C_D'可以达到2左右。

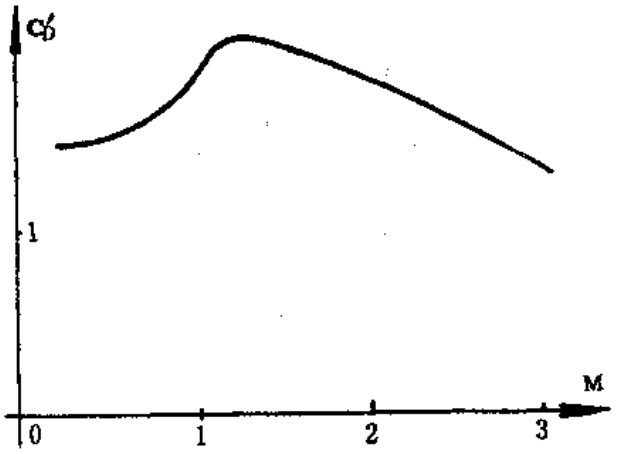


图 6-11 阻尼力矩系数导数C_D'与M数的关系图

经上述讨论，(6-4)式可表为

$$\left.\begin{aligned}
R_x&=R_T=\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{x_0}(M)(1+k\delta^2),\\
R_y&=R_N=\frac{1}{2}\rho V^2 S C_y'(M)\delta,\\
M_z&=\frac{1}{2}\rho V^2 S l C_m'(M)\delta,\\
M_D&=\frac{1}{2}\rho V S l^2 C_D'(M)\dot{\varphi}\ 。
\end{aligned}\right\}\tag{6-11}$$

式中：M_z与δ反向；M_D与$\dot{\varphi}$反向。

三、其它力和力矩

除了上述诸力和力矩以外，还有哥氏惯性力及其力矩。对于慢速自转火箭弹，还有马格努斯力及其力矩，但它们的数值较小，可以忽略不计。

§3 摆动运动方程式的组成及其通解

尾翼弹丸由于攻角δ而产生稳定力矩M_z，使弹丸一边向前飞行，一边绕质心摆动，象单摆一样，具有摆动特性。攻角δ的存在，可以在空间的任一方向，因而使弹丸作空间任一方向的摆动。在攻角不大的情况下，这一空间摆动问题，可以分解为在铅垂平面(即射击面)C内和包含速度矢量而垂直于铅垂平面的倾斜面S内两个方向的摆动，这就可以把空间摆动

问题分解为二个独立的平面摆动问题来讨论，可使讨论大为简化，如图 6-12 所示。

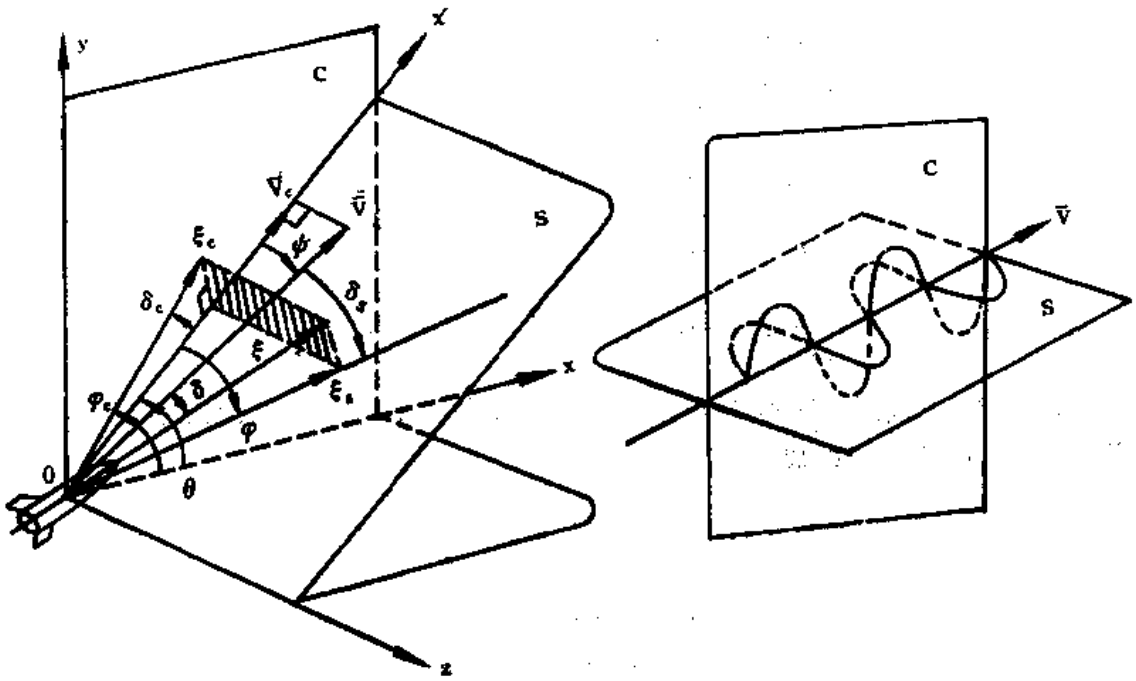


图 6-12　空间摆动分解为两个平面内的摆动图

一、在铅垂平面内的纵向摆动运动方程式

图 6-13 表示在铅垂平面内不旋转火箭弹的运动状态及示力图。建立惯性坐标轴系 $Oxyz$ 的运动方程式，向弹道切线及法线上投影得

$$m\frac{dV_c}{dt}=P_e\cos\delta_e-R_x-mg\sin\theta, \quad ①$$

$$mV_c\frac{d\theta}{dt}=P_e\sin\delta_e+R_y-mg\cos\theta, \quad ②$$

绕质心摆动方程为

$$A\frac{d^2\varphi_c}{dt^2}=M_p-M_u-M_D, \quad ③$$

再增加两个速度方程

$$\frac{dx}{dt}=V_c\cos\theta, \quad ④$$

$$\frac{dy}{dt}=V_c\cdot\sin\theta, \quad ⑤$$

及一个联系方程

$$\varphi_c=\theta+\delta_e。 \quad ⑥$$

(6-12)

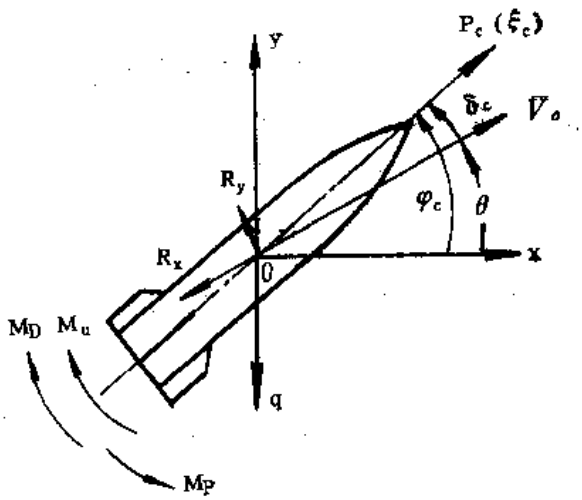


图 6-13　不旋转火箭弹在铅垂平面内的运动图

式中：m 为弹丸质量，在主动段中 m 是随时间而变化的；P_e 为推力轴向分力；R_x 为空气阻力；R_y 为升力；A 为弹丸赤道转动惯量；M_p 为推力矩；M_u 为稳定力矩；M_D 为赤道阻尼力矩。诸力和力矩都应该是铅垂面内的分量。

在初始条件给定后，便可求解上述方程组。

二、铅直平面摆内动运动方程式的简化

由理想弹道的质心运动方程组知（以下标 L 表示“理想”）

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dV_L}{dt} &= P_L - R_{XL} - mg\sin\theta_L, && ① \\ mV_L\frac{d\theta_L}{dt} &= -mg\cos\theta_L, && ② \\ \frac{dx_L}{dt} &= V_L\cos\theta_L, && ③ \\ \frac{dy_L}{dt} &= V_L\cos\theta_L。 && ④ \end{aligned}\right\} \tag{6-13}$$

显然，考虑了摆动运动后的参数与理想运动的参数是不相等的，其差值就是运动参数的偏差值。可将 (6-12) 与 (6-13) 式中各参数的关系表为下式

$$\left.\begin{aligned} V_c &= V_L + \Delta V, \\ \theta &= \theta_L + \psi, \\ \varphi_c &= \theta_L + \varphi, \\ Y &= Y_L + \Delta Y, \\ X &= X_L + \Delta X。 \end{aligned}\right\} \tag{6-14}$$

式中：ΔV 为速度值的偏差量；ψ 为速度方向相对于理想弹道切线方向的角偏差量，称为偏角；φ 为弹轴方向相对于理想弹道切线方向的角偏差量，称为摆动角；Δx，Δy 为质心坐标的偏差量。

由 (6-12)⑥ 式及 (6-14) 式知

$$\varphi = \psi + \delta_z。 \tag{6-15}$$

在简化过程中，把诸偏差量看成一阶小量，对角偏差的正弦可用角度本身的弧度值代替，对角偏差的余弦可取为 1，诸气动系数及有关系数值可视为常数。

将 (6-12)② 减 (6-13)② 式可近似得

$$mV_c\frac{d\psi}{dt} = P_c\cdot\delta_c + R_y。 \tag{6-16}$$

将 $\varphi_c = \theta_L + \varphi$ 代入 (5-12)③ 式得

$$A\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_p - M_u - M_D - A\ddot{\theta}_L。 \tag{6-17}$$

式中小圆点“·”表示对时间 t 的导数。

为了书写方便，略去（6-15）、（6-16）、（6-17）式中的下标符号“c”，并引入下列符号。

$$\left.\begin{aligned} b_m &= \frac{\rho S C_x}{2m}, \\ b_y &= \frac{\rho S C_y'}{2m}, \\ k_u &= \sqrt{\frac{\rho S l C_m'}{2A}}, \end{aligned}\right\} \tag{6-18}$$

$$k_D=-\frac{\rho S l^2 C_D'}{2A},$$

$$R_A=\sqrt{\frac{A}{m}}\ 。$$

式中：R_A 为赤道转动惯量回转半径，而 b_x、b_y、k_u、k_D 的数量级在亚音速时约为：$b_x(1\times10^{-4}$ 1/米)、$b_y(1\times10^{-3}$ 1/米)、$k_u(1\times10^{-1}$ 1/米)、$k_D(1\times10^{-3}$ 1/米)。

所以(6-11)式可变为

$$\left.\begin{aligned}
R_x&=\frac{1}{2}\rho V^2 S C_x=m\cdot b_x V^2,\\
R_y&=\frac{1}{2}\rho V^2 S C_y'\delta=m\cdot b_y\cdot V^2\cdot\delta,\\
M_u&=\frac{1}{2}\rho V^2 S l\, C_m'\delta=A\cdot k_u^2\cdot V^2\cdot\delta,\\
M_D&=\frac{1}{2}\rho V S\, l^2 C_D'\cdot\dot\varphi=A\cdot k_D\cdot V\cdot\dot\varphi\ 。
\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}19)$$

利用(6-18)式的符号，可由(6-15)、(6-16)、(6-17)式并注意到(6-19)式中的 $\dot\varphi$ 乃是 $\dot\varphi_c$，由(6-14)式 $\varphi_c=\theta_L+\varphi$ 得

$$\left.\begin{aligned}
&V\frac{d\psi}{dt}=\frac{P}{m}\delta+b_y V^2\delta=a_p\delta+b_y V^2\delta, && ①\\
&\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{a_p\cdot\Delta}{R_A^2}-k_u^2 V^2\delta-k_D V(\dot\varphi+\dot\theta_L)-\ddot\theta_L, && ②\\
&\varphi=\delta+\psi\ 。 && ③
\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}20)$$

式中：$a_p=P/m$，$M_p\doteq P\Delta$。

上式中的 V 和 $\dot\theta_L$ 可由(6-13)①,②式单独近似求解，再由上式联立解出偏角 ψ、摆动角 φ 及攻角 δ，这是研究摆动运动的中心问题。至于 Δx 和 Δy 量，它与摆动运动没有什么关系。(6-20)式便是铅垂平面内的摆动运动方程式。

三、在倾斜平面内的横向摆动运动方程式

为了研究侧向偏差，需要研究火箭弹在过速度矢量且垂直于铅垂平面的倾斜平面内的摆动运动。仍以不自转火箭弹主动段为例，假定诸力或力矩都作用在此平面内。这个平面就是垂直于射击平面且过理想弹道切线的平面 S，如图 6-14 所示。该图也表示火箭弹的受力及运动姿态。参阅图 6-12，$\overline{Ox'}$ 为该倾斜平面 S 与铅垂平面 C 的交线，$\bar V$ 矢量偏离射击面的偏角，仍称为 ψ。弹轴 ξ 的射影 ξ_s 与射击面 C 的夹角，仍称为摆动角 φ，速度矢量与弹轴 ξ_s 的夹角 δ_s，仍称为攻角，约定自图示位置起，φ、δ_s、ψ 向顺时针方向为正向。

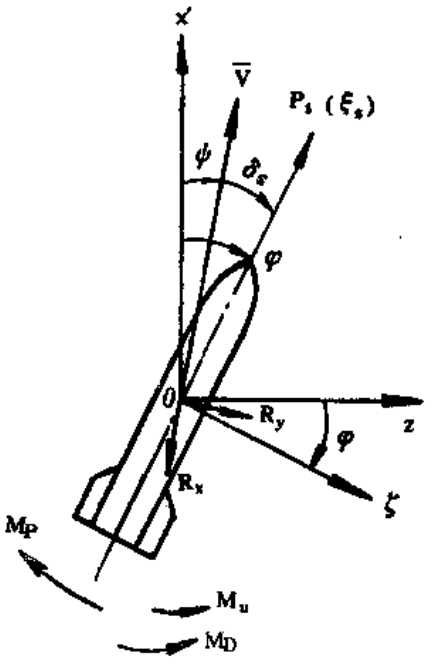


图 6-14　不旋转火箭弹在倾斜平面内的运动图

在直角坐标系 $Ox'y'z$ 内建立运动微分方程式，

并向弹道切线及法向方向上投影，得：

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= P_s\cos\delta_s - R_x - mg\sin\theta_L\cos\psi, \\ mV\frac{d\psi}{dt} &= P_s\sin\delta_s + R_y + mg\sin\theta_L\sin\psi, \\ \text{及：}\quad A\frac{d^2\varphi}{dt} &= M_p - M_u - M_D\text{。} \end{aligned}\right\} \tag{6-21}$$

在投影时，要注意到重力 mg 是先投影到 Ox' 轴上，再投影到弹道切线方向及其垂直方向上。

依前面的方法，可得火箭弹主动段的横向摆动运动方程式如下

$$\left.\begin{aligned} V\frac{d\psi}{dt} &= a_p\delta_s + b_y V^2\delta_s + g\sin\theta_L\sin\psi, \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \frac{a_p\cdot\Delta}{R_\Delta^2} - k_u^2V^2\delta_s - k_DV\dot{\varphi}, \\ \varphi &= \psi + \delta_s \end{aligned}\right\} \tag{6-22}$$

比较方程组（6-22）和（6-20），这两个方程组的齐次方程及推力偏心矩的非齐次项都完全相同，而且都是线性微分方程。线性微分方程的解具有叠加的性质。这样，无论是起始扰动或是推力偏心，对铅垂平面或倾斜平面内的摆动扰动运动，其影响是一样的。所以只要讨论一组方程就可以见其整个摆动运动了。而两式中与 θ_L，$\dot{\theta}_L$ 及 $\ddot{\theta}_L$ 有关的量，称为重力扰动项，是由于重力作用使速度 V 矢量不断向下偏转所引起的，它不造成散布，在分析散布时可不去管它。

四、摆动运动方程组的变量置换

现在我们对（6-20）及（6-22）式采用统一的形式

$$\left.\begin{aligned} &V\frac{d\psi}{dt} = a_p\delta + b_yV^2\delta\text{，} && ① \\ &\frac{d^2\varphi}{dt} + k_u^2V^2\delta + k_DV\frac{d\varphi}{dt} = \frac{a_p\Delta}{R_\Delta^2}\text{，} && ② \\ &\varphi = \delta + \psi\text{。} && ③ \end{aligned}\right\} \tag{6-23}$$

初始条件：$t=0$，$\psi=\psi_0$，$\varphi=\varphi_0$，$\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0$。

为了使上述方程组的形式变得更简单，以便分析讨论，引入无因次变量 u，以代替自变量 t，

定义　　$u = k_u\cdot s$

式中：s 为弹道弧长，$\frac{ds}{dt}=V$。

则

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{du}\cdot\frac{du}{dt} = k_u\cdot V\cdot\psi'\text{，} && ① \\ &\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{du}{dt} = k_u\cdot V\cdot\varphi'\text{，} && ② \\ &\frac{d^2\varphi}{dt^2} = = k_u\cdot V\frac{d\varphi'}{dt} + k_u\frac{dV}{dt}\varphi' = (k_uV)^2\varphi'' + k_u\frac{dV}{dt}\varphi'\text{。} && ③ \end{aligned}\right\} \tag{6-24}$$

而由（6-12）① 式知

$$\frac{dV}{dt}=\frac{P}{m}-b_x V^2-g\sin\theta,\quad \text{而}\quad \frac{P}{m}=a_P。$$

则
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=(k_u V)^2\varphi''-k_u(a_P-b_x V^2-g\sin\theta)\varphi'。\tag{6-25}$$

上各式中，右上角的“′”号代表对自变量 u 的导数。将 (6-24)① 代入 (6-23)① 式，将 (6-24)② 及 (6-25) 代入 (6-23)② 式，可得到下列方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\psi'=\frac{1}{k_u}\left(\frac{a_P}{V^2}+b_y\right)\delta, && ①\\
&\varphi''+\frac{1}{k_u}\left(\frac{a_P-g\sin\theta}{V^2}-b_x+k_D\right)\varphi'+\delta=\frac{a_P\Delta}{R_A^2}\frac{1}{(k_u V)^2}, && ②\\
&\varphi=\psi+\delta && ③
\end{aligned}\right\}\tag{6-26}$$

上述方程还不便求解，根据经验，需再作变量置换，令 $w=V\delta$，将 w 对 u 求导数，得

$$w'=V'\delta+V\delta'。$$

整理之得

$$\delta'=\frac{w'}{V}-\frac{V'}{V}\delta=\frac{w'}{V}-\frac{V'}{V}\frac{w}{V}。\tag{6-27}$$

将 (6-26)③ 式对 u 微分一次得

$$\varphi'=\psi'+\delta'。\tag{6-28}$$

将 (6-26)① 及 (6-27) 代入上式，得

$$\varphi'=\frac{1}{k_u}\left(\frac{a_p}{V^2}+b_y\right)\delta+\frac{w'}{V}-\frac{V'}{V}\cdot\frac{w}{V}=\frac{w'}{V}+\left(\frac{a_p}{k_u V^2}+\frac{b_y}{k_u}-\frac{V'}{V}\right)\frac{w}{V},$$

又

$$\frac{V'}{V}=\frac{1}{V}\frac{dV}{du}=\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}\cdot\frac{dt}{du}=(a_p-b_x V^2-g\sin\theta)\frac{1}{k_u V^2},$$

参阅 (6-12)① 式及 (6-19) 和 (6-20) 式。

代入上式得

$$\varphi'=\frac{w'}{V}+b^*\frac{w}{V}。\tag{6-28}'$$

式中，

$$b^*=\frac{1}{k_u}\left(b_x+b_y+\frac{g\sin\theta}{V^2}\right)。\tag{6-29}$$

根据 (6-18) 式 k_u、b_x、b_y 的数量级，可知 $b^*\ll 1$，可视为常量。

将 (6-28) 式对 u 微分一次得

$$\begin{aligned}\varphi''&=\frac{w''}{V}-\frac{V'}{V}\cdot\frac{w'}{V}+b^*\left(\frac{w'}{V}-\frac{V'}{V}\frac{w}{V}\right)\\&=\frac{w''}{V}+\left(b^*-\frac{V'}{V}\right)\frac{w'}{V}-b^*\frac{V'}{V}\cdot\frac{w}{V}。\end{aligned}\tag{6-30}$$

将 φ' 及 φ'' 之值代入 (6-26)② 式，经整理并略去某些 $\ll 1$ 的微量，得

$$w'' + 2bw' + w = \frac{a_P \Delta}{R_\Delta^2 k_u^2} \frac{1}{V} 。 \tag{6-31}$$

式中：

$$b = \frac{1}{2k_u}\left(b_x + b_y + k_D + \frac{g\sin\theta}{V^2}\right)。 \tag{6-32}$$

b 是一个无因次量，只有 0.1 的数量级或更小些，在微分方程求解过程中，常把它看作常量。

(6-31) 式是一个典型的阻尼振动型方程，b 是阻尼系数，强迫振动项是推力偏心距。将此方程积分便得到攻角 δ。将 δ 代入 (6-26)① 式积分，便可得到速度矢量的偏角 ψ。

$$\psi = \psi_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{1}{k_u}\left(\frac{a_p}{V^2} + b_y\right)\delta du \tag{6-33}$$

值得注意的是，在推导 (6-31) 式时，对火箭弹质心运动加速度 dV/dt 并没有特殊要求。因此该方程具有普遍性，不但对主动段，而且对被动段也是适用的。不过，在被动段中应取 $a_P = 0$。

五、振动运动微分方程式的通解

(6-31) 式的齐次方程为

$$w'' + 2bw' + w = 0 。$$

初始条件为 $t = 0$ 时 $u = u_0$；$w = w_0 = V_0\delta_0 = V_0(\varphi_0 - \psi_0)$；$w' = w_0'$。由(6-28)′ 及 (6-24) 式知

$$w' = V\varphi' - b^* w,$$

$$\varphi' = \frac{\dot{\varphi}}{k_u \cdot V},$$

故

$$w' = \frac{\dot{\varphi}}{k_u} - b^* w 。 \tag{6-34}$$

则

$$w_0' = \frac{\dot{\varphi}_0}{k_u} - b^* w_0 。 \tag{6-34)'}$$

而

$$u \approx k_u \cdot s, \qquad 故 \qquad u_0 \approx k_u \cdot S_0 。 \tag{6-35}$$

齐次方程 $w'' + 2bw' + w = 0$ 的两个特征根 r_1 及 r_2 为

$$r_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - 1} 。$$

由于 $b \ll 1$，故

$$r_{1,2} \approx -b \pm j$$

于是方程 (6-31) 的通解为：

$$w = e^{-b(u-u_0)}\left[C_1 \cos(u - u_0) + C_2 \sin(u - u_0)\right]。 \tag{6-36}$$

将初始条件代入上式，解得

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= w_0 = V_0(\varphi_0 - \psi_0), \\ C_2 &= w_0' + bw_0 \approx \frac{\dot{\varphi}_0}{k_u} 。 \end{aligned}\right\} \tag{6-37}$$

将 C_1 和 C_2 值代入 (6-36) 中，并注意到 $w = V\delta$ 得

$$\delta = \frac{\dot{\varphi}_0}{k_u V} e^{-b(u-u_0)} \sin(u - u_0) + \varphi_0 \frac{V_0}{V} e^{-b(u-u_0)} \cos(u - u_0)$$

$$- \psi_0 \frac{V_0}{V} e^{-b(u-u_0)} \cos(u - u_0)。 \tag{6-38}$$

这就是由起始扰动 $\dot{\varphi}_0$、φ_0、ψ_0 所引起的攻角的综合表达式。在火箭外弹道学中，常引入特征函数的概念，它表示由单位扰动量所引起的偏差量。将 $\dot{\varphi}_0$，φ_0、ψ_0 分别为一个单位时所引起的攻角记为 $\delta^*_{\dot{\varphi}_0}$、$\delta^*_{\varphi_0}$、$\delta^*_{\psi_0}$，即

$$\left.\begin{aligned}\delta^*_{\dot{\varphi}_0} &= \frac{1}{k_u V} e^{-b(u-u_0)} \sin(u-u_0),\\ \delta^*_{\varphi_0} &= \frac{V_0}{V} e^{-b(u-u_0)} \cos(u-u_0),\\ \delta^*_{\psi_0} &= -\delta^*_{\varphi_0}。\end{aligned}\right| \qquad (6\text{-}38)'$$

则

$$\delta = \dot{\varphi}_0 \delta^*_{\dot{\varphi}_0} + \varphi_0 \cdot \delta^*_{\varphi_0} + \psi_0 \delta^*_{\psi_0}。 \qquad (6\text{-}39)$$

可以看作 δ 是由上述三部分起始扰动 $\dot{\varphi}_0$、φ_0、ψ_0 单独作用后叠加而成的。事实上，它们的初始条件可分为三部分，即

$$\left.\begin{aligned}&u=u_0 \text{ 时 } \dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0,\ \varphi_0=0,\ \psi_0=0, \quad ①\\ &u=u_0 \text{ 时 } \varphi=\varphi_0,\ \dot{\varphi}_0=0,\ \psi_0=0, \quad ②\\ &u=u_0 \text{ 时 } \psi=\psi_0,\ \dot{\varphi}_0=0,\ \varphi_0=0, \quad ③\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}40)$$

(6-39) 式正是上述三种初始条件下的解的叠加。

有了攻角 δ 的解，偏角 ψ 也就可积了，其解可以按上述三种初始条件单独求得后再叠加在一起而得。

(1)考虑第一种初始条件下的解，将 $\varphi_0=0$，$\psi_0=0$ 代入 (6-26)① 式积分，得由 $\dot{\varphi}_0$ 所引起的偏角 $\psi_{\dot{\varphi}_0}$，也用它的特征函数 $\psi^*_{\dot{\varphi}_0}$ 表示，则有

$$\psi^*_{\dot{\varphi}_0} = \frac{1}{k_u}\int_{u_0}^{u}\left(\frac{a_P}{V^2}+b_y\right)\frac{1}{k_u V}e^{-b(u-u_0)}\sin(u-u_0)\,du。 \qquad (6\text{-}41)$$

上式中积分号内的 V，需换成 u 的函数，而 a_P、b_y、k_u、b 则可视为常量。一般航空火箭弹在飞离滑轨后的加速度可视为常量，如以 $\bar{a}$ 表示平均加速度，以 S_0 表示火箭弹后定心部离滑轨时开始计量的弹道弧长，则。

$$\begin{aligned}&V = V_0 + \bar{a}t,\\ &V^2 = (V_0+\bar{a}t)^2 = V_0^2 + 2V_0\bar{a}t + \bar{a}^2t^2 = V_0^2 + 2\bar{a}\left(V_0t+\frac{1}{2}\bar{a}t^2\right)\\ &\quad = V_0^2 + 2\bar{a}S_0。\end{aligned} \qquad (6\text{-}42)$$

近似计算时，可取火箭弹的推加速度 $a_P \doteq \bar{a}$ (或 $\bar{a}=\frac{V_K-V_0}{t_K}$ 参见第四章§ 2)。

另外，当火箭弹离滑轨瞬时，由 u_0 所对应的弹道弧长 S_0 值，应与 V_0 相对应。把 (6-42) 式中的 V_0^2 换为与 S_0 相对应的值。设取 S_0 的值与 V_0 的关系为

$$S_{0e_2} = \frac{V_0^2}{2\bar{a}}$$

于是 (6-42) 式变为

$$V^2 = 2\bar{a}\left(\frac{V_0^2}{2\bar{a}}+S_0\right) = 2\bar{a}(S_{0e_2}+S_0) = 2\bar{a}\cdot S_{e_2}。 \qquad (6\text{-}43)$$

虽然 S_{0e_2} 对应着 V_0，但 S_{0e_2} 并不是滑轨的真实长度，我们称它为“有效滑轨长”。相

应的 S_{es}，就称为“弹道弧长有效值”，它的意义实际上是另外选择量度弹道弧长的起点罢了。为了简化书写，以后将下标“es”略去，故有

$$V^2 = 2\bar{a}S \quad 。 \tag{6-44}$$

关于“有效滑轨长”的问题，后面还要讨论。

将 (6-44) 式代入 (6-41) 式，并注意到 $u = k_u \cdot S$，得

$$\psi^*_{\dot{\varphi}_0} = \frac{1}{\sqrt{2\bar{a}k_u}} \int_{u_0}^{u} \frac{(a_P/\bar{a} + 2b_y S)}{2u\sqrt{u}} e^{-b(u-u_0)} \sin(u-u_0)\, du \quad 。 \tag{6-45}$$

上式被积函数中 $(a_P/\bar{a} + 2b_y S)\, e^{-b(u-u_0)}$ 是一个变化缓慢的函数，积分时可取 u_0 处的值，而不会影响它的准确性，（即取 $u = u_0$ 值）。

令

$$C_3 = \frac{a_P}{\bar{a}} + 2b_y S \,, \tag{6-46}$$

则 (6-45) 式变为

$$\psi^*_{\dot{\varphi}_0} = \frac{C_3}{\sqrt{2\bar{a}k_u}} \int_{u_0}^{u} \frac{\sin(u-u_0)}{2u\sqrt{u}}\, du \quad 。 \tag{6-47}$$

令

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{u_0}^{u} \frac{\sin(u-u_0)}{u\sqrt{u}}\, du = R_{\dot{\varphi}_0}(u, u_0) \,, \tag{6-48}$$

则

$$\psi^*_{\dot{\varphi}_0} = C3\sqrt{\frac{\pi}{\bar{a}k_u}}\, R_{\dot{\varphi}_0}(u, u_0) 。 \tag{6-49}$$

$R_{\dot{\varphi}_0}(u, u_0)$ 函数不是初等积分，可事先算出并编表备查。①

（2）考虑第 2 种初始条件（$u = u_0$ 时，$\varphi = \varphi_0$，$\dot{\varphi}_0 = 0$，$\psi_0 = 0$）时，将 (6-40)② 式代入 (6-26)① 式积分。用特征函数 $\psi^*_{\varphi_0}$ 表示由单位 φ_0 所引起的偏角 ψ_{φ_0}，仿上面的方法，得

$$\psi^*_{\varphi_0} = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{k_u}\left(\frac{a_P}{V^2} + b_y\right)\frac{V_0}{V} e^{-b(u-u_0)} \cos(u-u_0)\, du \quad 。 \tag{6-50}$$

把 (6-44) 和 (6-46) 式代入上式得

$$\psi^*_{\varphi_0} = C_3 \int_{u_0}^{u} \frac{1}{2u}\sqrt{\frac{u_0}{u}} \cos(u-u_0)\, du 。$$

令函数

$$\int_{u_0}^{u} \frac{1}{2u}\sqrt{\frac{u_0}{u}} \cos(u-u_0)\, du = B_{\varphi_0}(u,\ u_0)② \,, \tag{6-51}$$

则

$$\psi^*_{\varphi_0} = C_3 \cdot B_{\varphi_0}(u,\ u_0) 。 \tag{6-52}$$

（3）考虑第三种初始条件（$u = u_0$ 时，$\dot{\varphi}_0 = 0, \varphi_0 = 0$，$\psi = \psi_0$）时，将 (6-40)③ 式代入 (6-33) 式积分，注意到 ψ_0 的存在，也用特征函数 $\psi^*_{\varphi_0}$ 表示由单位 ψ_0 时所引起的偏角 ψ_{ψ_0}，仿

① 该函数表参阅参考文献[3]的附表 19。

② 令 $R_{\varphi_0}(u,\ u_0) = 1 - B_{\varphi_0}(u,\ u_0)$，$R_{\varphi_0}(u, u_0)$ 函数，也事先计算后列表备查。该函数表参阅参考文献[3]的附表 20。

照上面的方法，得

$$\psi^*_{\psi_0} = 1 - C_3\int_{u_0}^{u} \frac{1}{2u}\sqrt{\frac{u_0}{u}}\cos(u-u_0)\,du \ 。$$

即 $\psi^*_{\psi_0} = 1 - C_3 \cdot B_{\psi_0}(u,\ u_0)$。

故 $\psi^*_{\varphi_0} = 1 - \psi^*_{\psi_0}$。 (6-53)

至此，可得偏角通解 ψ 的计算公式为

$$\psi = \psi^*_{\dot\varphi_0} \cdot \dot\varphi_0 + \psi^*_{\varphi_0} \cdot \varphi_0 + \psi^*_{\psi_0} \cdot \psi_0 = \psi_{\dot\varphi_0} + \psi_{\varphi_0} + \psi_{\psi_0},$$

$$= \dot\varphi_0 \cdot C_3\sqrt{\frac{\pi}{\bar a k_u}} \cdot R^*_{\dot\varphi_0}(u,\ u_0) + \varphi_0 \cdot C_3 \cdot B_{\varphi_0}(u,\ u_0) + \psi_0[1 - C_3 \cdot B_{\varphi_0}(u,\ u_0)]$$

$$= \psi_c + C_3\left[\dot\varphi_0\sqrt{\frac{\pi}{\bar a k_u}}\, R^*_{\dot\varphi_0}(u,\ u_0) + (\varphi_0 - \psi_0) \cdot B_{\varphi_0}(u,\ u_0)\right]$$

$$= \varphi_c + C_3\left[\dot\varphi_0\sqrt{\frac{\pi}{\bar a k_u}}\, R^*_{\dot\varphi_0}(u,\ u_0) - (\varphi_0 - \psi_0) \cdot R_{\varphi_0}(u,\ u_0)\right]。 \qquad (6\text{-}54)$$

§4 通解攻角和偏角的性质及影响偏角的因素

一、攻角和偏角的性质

从 (6-39) 式和 (6-54) 式 δ 及 ψ 的计算式中，我们可以作出函数曲线，这些图线如图 6-15 所示。图中 x_N 表示发射器轴线方向。现以 $\delta^*_{\dot\varphi_0}$ 及 $\psi^*_{\dot\varphi_0}$ 为例进行分析。由图 6-15(a) 和 (6-38) 式可知，攻角 $\delta_{\dot\varphi_0}$ 是一衰减的正弦函数。即弹轴相对于速度矢量的摆动是衰减的正弦摆动。

这个摆动，和在重力作用下的单摆的摆动相似，如图 6-16 所示。为了定性地说明摆动的物理过程，暂不考虑速度的方向变化，当火箭弹受到起始摆动角速度 $\dot\varphi_0$ 时，在惯性的作用下，弹轴将摆动而产生攻角。有了攻角即产生稳定力矩而使摆动减速，经过一段时间后，摆动角速度 $\dot\varphi$ 减少至零，而此时攻角 δ 达到最大值，如图 6-16(c) 所示。在 M_u 的作用下，弹轴又往回摆动，使攻角 δ 减小，M_u 也减小，如图 6-16(d) 所示。当攻角减小至零时，由于弹轴仍有一定的摆动角速度 $\dot\varphi$，故在惯性的作用下，弹轴继续向反方向摆动，因而攻角出现负值，便出现反方向的 M_u，使摆动角速度减小，如此循环，往复不止。

弹轴摆动幅度衰减的原因，主要是在主动段内速度逐渐增大，使稳定力矩 M_u 随速度增大而增大的缘故，其次是赤道阻尼力矩 M_D 的作用，使摆动幅度和周期都逐渐衰减。

从 $\delta^*_{\dot\varphi_0}$ 的表达式可看出，弹轴摆动一个周期内，弹丸质心所经过的路程 S（即波长 λ）是不变的，因为当 $(u-u_0) = \Delta u = 2\pi$ 时，有。

$$(u-u_0) = \Delta u = k_u \cdot \Delta S = k_u \cdot \lambda = 2\pi,$$

故

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_u} \ 。 \qquad (6\text{-}55)$$

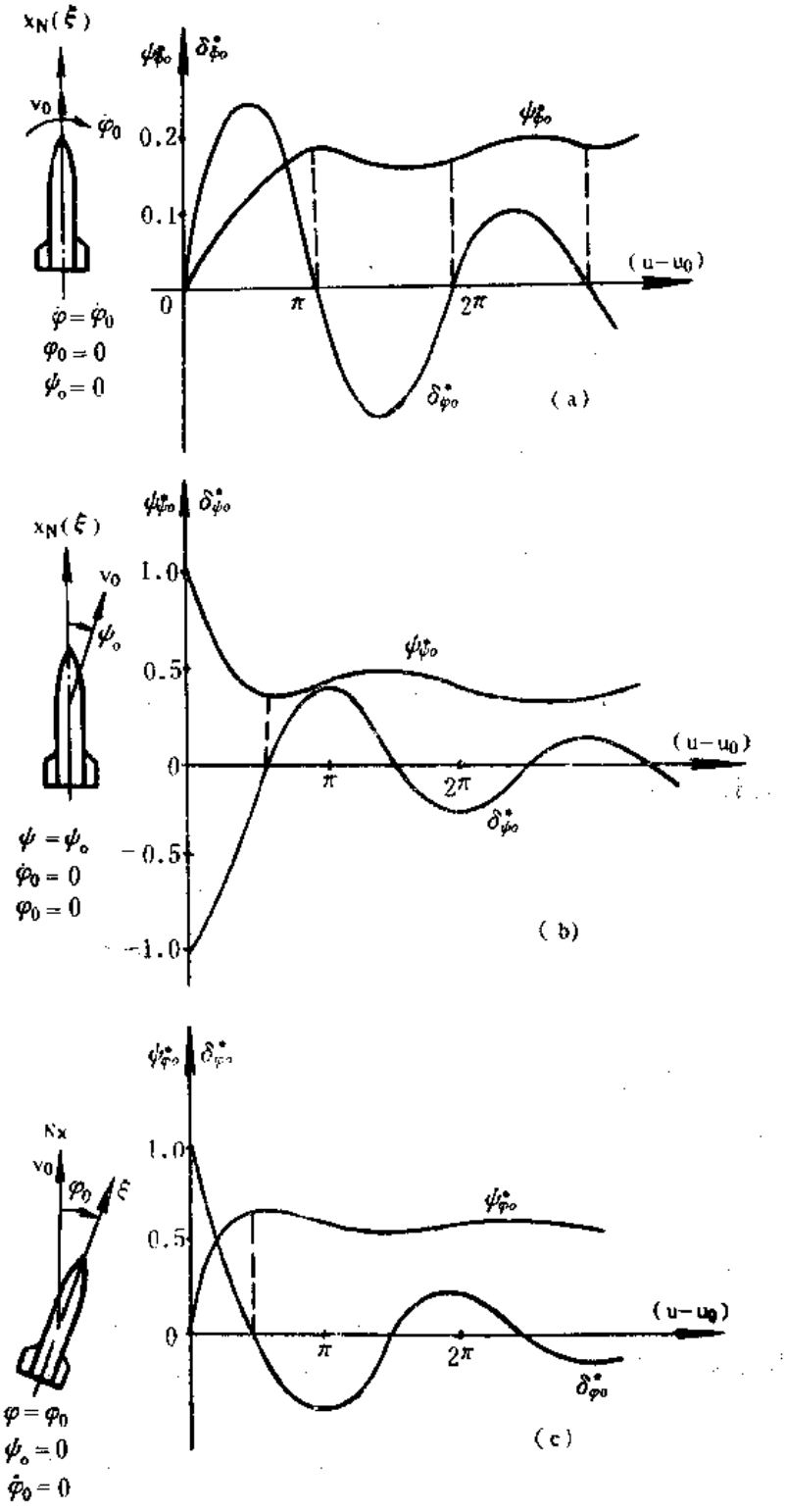


图 6-15　攻角 δ 和偏角 ψ 的函数曲线图

(a) $\psi^*_{\dot{\varphi}_0}$ 及 $\delta^*_{\dot{\varphi}_0}$ 与 $(u-u_0)$ 的关系　　(b) $\psi^*_{\psi_0}$ 及 $\delta^*_{\psi_0}$ 与 $(u-u_0)$ 的关系

(c) $\psi^*_{\varphi_0}$ 及 $\delta^*_{\varphi_0}$ 与 $(u-u_0)$ 的关系

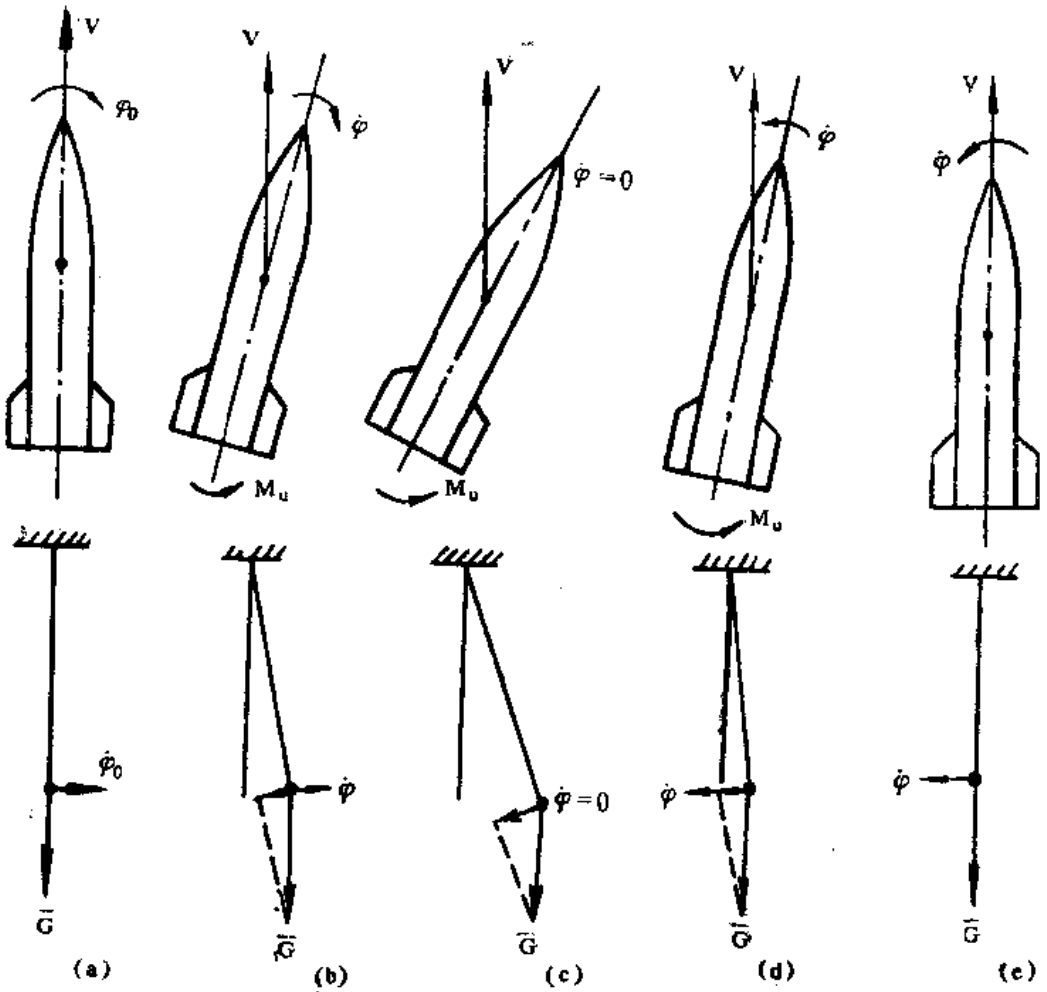


图 6-16　火箭弹的摆动运动与单摆摆动运动比拟图

(a) 起始状态　(b) 在 $\dot{\varphi}_0$ 作用下有 $\dot{\varphi}$ 及恢复力矩 M_u　(c) δ 角最大，$\dot{\varphi}=0$

(d) 在 M_u 作用下返回原位　(e) 回到原来位置，$\dot{\varphi}\neq 0$

可以通过实验测量出攻角的变化规律，从而测出 λ，由此求得 k_u，再求得力矩系数的导数 $C_m^{\prime}(M)$。由此可知 $u=k_u S$ 的意义。将 (6-55) 式代入得到

$$u=2\pi\frac{S}{\lambda}。\tag{6-56}$$

可知 u 是相对弧长，决定着摆动的相位。

偏角 $\psi^*_{\dot{\varphi}_0}(u-u_0)$ 曲线，在离轨后前半个周期内增长很快，以后虽有些起伏，但变化幅度不大。我们把攻角变化的第一个半波长，称为起始摆动角速度所引起偏角 $\psi^*_{\dot{\varphi}_0}$ 的弹道临段界，记为 $S_{L\omega}-S_0$，则

$$S_{L\omega}-S_0=\frac{\lambda}{2}。\tag{6-57}$$

临界段是角偏差量 ψ 形成的主要区域，因为这时火箭弹在开始离轨时，抗干扰能力较弱，要减少散布，就要在临界段内采取措施，提高火箭弹在临界段内的抗干扰能力。

在火箭弹刚离轨时，速度不太大，攻角增长又快，故推力法向分量较大，因此速度方向

容易改变，以后速度增大了，稳定力矩也增大，偏角的变化也就不大了。

从图 6-15(a) 及 (6-47) 式可看出，偏角的变化趋势，取决于攻角。当 $\delta > 0$ 时，ψ 增大；当 $\delta < 0$ 时，ψ 减小；当 $\delta = 0$ 时，ψ 有极值。从物理意义上讲，推力的法向分量与弹轴 ξ 总处于速度矢量的同一侧，当 $\delta \neq 0$ 时，推力的法向分量力图使速度矢量方向偏回弹轴方向，因而当 $\delta > 0$ 时，ψ 增大。当 $\delta < 0$ 时，ψ 减小。当 $\delta = 0$ 时，ψ 有极值。

至于 φ_0 和 ψ_0 所引起的攻角和偏角的性质，在许多方面都与上述相仿，它们的变化图象如图 6-15(b),(c) 所示。这里不再多说。但是它们各有自己的临界段，而它们的临界段只在刚离滑轨的四分之一段波长的弹道上。

因为偏角主要是在临界段内形成的，所以计算偏角时，由于临界段的相对速度不很大，在这段内可视为载机速度。故气动力系数可取这段内的平均值（例如 $C_m^{\alpha}(M)$、$C_D^{\alpha}(M)$、C_{z_0}、C_y^{α} 对等参数）。

二、影响偏角的因素

我们以 $\psi^*_{\dot{\varphi}_0}$ 为例，由于

$$\psi^*_{\dot{\varphi}_0} = C_3\sqrt{\frac{\pi}{k_u\bar{a}}}R_{\dot{\varphi}_0}(u,\ u_0)。$$

可知它与 $\dot{\varphi}_0$、C_3、k_u、$\bar{a}$、S_0 等因素有关，其中 $\dot{\varphi}_0$ 与起始发射姿态和扰动有关。$\dot{\varphi}_0$ 具有一定的随机性，其值应具体分析计算。为求出弹着点的偏差，应分析上述诸因素对主动段末点 K 之偏角 $\psi^*_{\dot{\varphi}_0}(u_0,\ u_K)$ 的影响。

1．有效滑轨长度 S_{0ca} 对 $\psi^*_{\dot{\varphi}_0}(u_0,\ u_K)$ 的影响

我们已经求得了当加速度 $\bar{a}$ 在全主动段上（包括滑轨段）为常数及无推力偏心矩时 (6-31) 式的齐次方程的通解。但实际上，推力加速度 a 的变化，如图 6-17 所示。即起始运动时并不立即等于 $\bar{a}$ 值，经过一段时间后才接近为一常数。当然这段时间并不长，但通常发生在滑轨段内，所以滑轨段并不是等加速度运动。因此我们不能直接用 (6-54) 式计算诸 ψ^* 值。

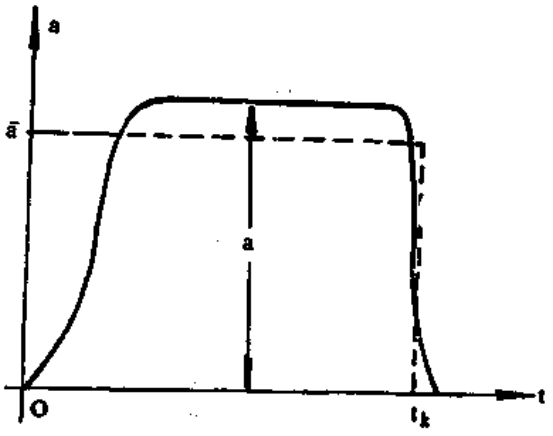


图 6-17　推力加速度 a 随时间 t 的变化图

现在，假设有一假想火箭弹道，其推力加速度在滑轨段内外都是常量 $\bar{a}$，而且当 $t = t_g$ 时火箭弹离轨瞬间的速度与实际火箭弹离轨时的速度相同。显然这时假想火箭弹滑轨长 S_{0ca} 与实际滑轨长 S_0 不一样。我们称 S_{0ca} 为有效滑轨长。故当飞离滑轨瞬间的速度为 V_0 时，推力加速度为 $\bar{a}$。则有效滑轨长 S_{0ca} 为

$$S_{0ca} = \frac{V_0^2}{2\bar{a}},\qquad \text{参阅 (6-44) 式。} \tag{6-58}$$

我们应用有效滑轨长 S_{0ca} 概念后，以有效弧长 S_{ea} 代入(6-54)式便可直接求诸 ψ^* 值了。而 S_{ea} 与 S 的关系为

$$S_{ea} = S + S_{0ca} - S_0。 \tag{6-59}$$

由(6-41)式可看出，若在 a 不变的情况下，尽量增加火箭弹离轨瞬间的速度，就可使偏角减小。要使火箭弹离轨时的速度增大的方法有

(1) 增长滑轨的长度，但是在飞机上难于使用这种方法，因为机翼的弦长是有限的。

(2) 使用增程弹或混合装药，即使用火炮来发射火箭弹。或使滑轨段的推力加速度大于离轨后的加速度，如图 6-18 所示。

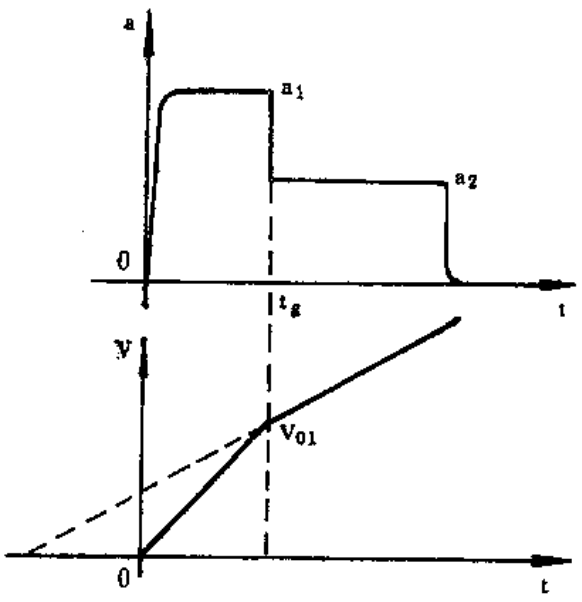


图 6-18 增程火箭弹的加速度图

(3) 在顺飞行的方向发射火箭，以增大绝对初速度，这是飞机使用火箭以减少弹着点散布的有利条件。根据这一道理，有时在飞机上实际发射火箭弹甚至可以不用滑轨，即所谓“零发射”。此时的有效滑轨长 S_{0es} 为

$$S_{0es}=\frac{V_1^2}{2\bar{a}}。\tag{6-60}$$

式中，V_1 为发射时飞机的速度。

若火箭弹飞离滑轨时的相对速度为 V_g，则静止发射时的有效滑轨长为

$$S_{0es}=\frac{V_g^2}{2\bar{a}}\tag{6-60}'$$

而从飞机上发射时，其有效滑轨长则为

$$S_{0es}=\frac{(V_1+V_g)^2}{2\bar{a}}。\tag{6-61}$$

亦即从飞机上发射比在地面上发射相同的火箭弹，其有效滑轨长增大了$\left(1+\frac{V_1}{V_g}\right)^2$倍。因而从飞机上发射时的散布，要比地面发射时的散布小许多倍。例如某型火箭弹在地面单发发射时，其散布 $E_y=E_z=5.5$ 千分，而在 12000 米高空，平飞速度为 $V_1=850$ 公里/小时发射时，其单发散布减少到 $E_y=E_z=1.0$ 千分。

从(6-48)式 $R_{\dot{\varphi}_1}(u,\ u_0)$ 函数中可知，u_0 增大，$R_{\dot{\varphi}_1}(u,\ u_0)$ 则减小，$\psi^*_{\dot{\varphi}_0}$ 也就减小，这就意味着 $u_0=k_u\cdot S_0$ 中的 S_0（即有效滑轨长）要增加。这可由图 6-19(a) 看出。

此外，从图 6-19(b) 可看出，当 u_0 增长到一定值后，$R_{\dot{\varphi}_0}(u,\ u_0)$ 随 u_0 的变化就不大了。

2．系数 k_u 的影响

k_u 增加可使 $\psi^*_{\dot{\varphi}_0}$ 减小，k_u 增加，意味着稳定力矩 M_u 增大，使攻角 δ 的摆动幅值减小；同时，k_u 增大使波长减小，参见(6-55)式，从而临界段内飞行时间短了，这两方面都使 $\psi^*_{\dot{\varphi}}$ 减小。

3．C_3 的影响

由(6-46)式和 $C_3=\frac{a_P}{\bar{a}}+2b_y S_0$。

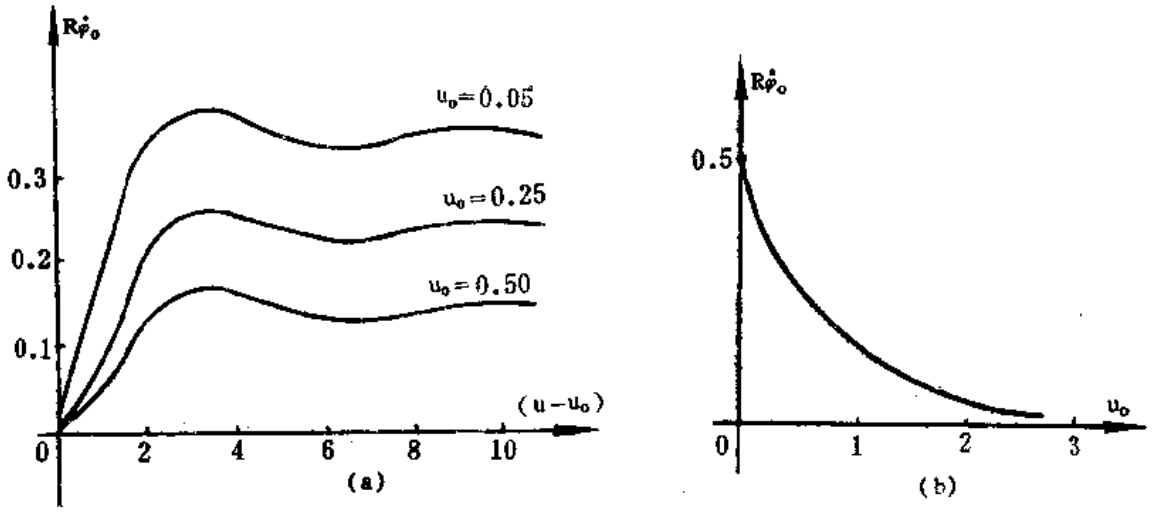


图 6-19 $R\dot{\varphi}_0$ 函数关系图

(a) $R\dot{\varphi}_0$ 与 $(u-u_0)$ 的关系　　(b) $R\dot{\varphi}_0$ 与 u_0 的关系

由 (6-49) 式 $\psi^*_{\dot{\varphi}_0}=C_3\sqrt{\frac{\pi}{\bar{a}k_u}}\cdot R_{\dot{\varphi}_0}(u,\ u_0)$，知 $\psi^*_{\dot{\varphi}_0}$ 与 C_3 成正比关系，对于 V_0 不太大的火箭弹，可取 $\bar{a}=a_P$，而 $2b_y S\ll 1$，故 $C_3\approx 1$。当初速较大时，由于阻力的影响，则 $\bar{a}<a_P$，故 $C_3>1$，这时阻力起减速作用，会使偏角增大。当 δ 增大时，b_y 会增大，则 C_3 还会增大。

4．推力加速度 a_P 的影响

当滑轨长度一定时，a_P 的增大，会使 V_0 增大，这样有效滑轨长度将增大，(见 6-58 式)，从而增大 u_0；同时当以 a_P 代替 $\bar{a}$ 时，a_P 增大会使 $\sqrt{\frac{\pi}{k_u\bar{a}}}$ 减小，都有利于 $\psi^*_{\dot{\varphi}_0}$ 的减小。

§5 摆动运动方程式的特解——推力偏心产生的攻角和偏角

一、特解的求法

对微分方程式 (6-31) 的特解，可以在初始条件为零的条件下求得，然后就得到由推力偏心力矩 $M_P=P\cdot\Delta$ 所引起的攻角 δ_Δ，再将 δ_Δ 代入 (6-26)① 式积分便可得到偏角 ψ_Δ。

δ_Δ 是非齐次方程 (6-31) 的特解；ψ_Δ 是推力偏心力矩 M_P 所产生的偏角；P 为推力的轴线分量；Δ 为推力作用线偏离质心的距离。

但用数学的方法求解 (6-31) 式非齐次方程的特解，较为麻烦。下面介绍另一种方法，称为“格林函数法”。格林函数法是解非齐次方程特解的一种方法。这种方法的实质，是把外界强迫干扰的连续作用，看作是某种性质的起始扰动对全弹道各个部位的作用。这样，把解非齐次方程的特解问题，就变成求初始值的齐次解来处理了。

如图 6-20 所示，根据线性微分方程可叠加的性质，把推力矩的作用化整为零，即将主动段弧长分割成若干微小弧段，分别研究 M_P 在各弧段上的作用。然后将 M_P 在各弧段上的作用结果相叠加而得到总结果。我们在 $S=S_n$ 附近取一微段弧长 ds_n，火箭弹飞达此点的时

间是 t_n，火箭弹速度为 V_n，则火箭弹在 ds_n 段内所走的时间为 dt_n。

则
$$dt_n = \frac{dS_n}{V_n}。 \tag{6-62}$$

设推力偏心力矩 $M_P = P \cdot \Delta$ 是一不变的常量，我们把 M_P 对 dS_n 弧段的作用情况及对以后火箭弹的运动的影响搞清了，就可以推广到其它弧段。

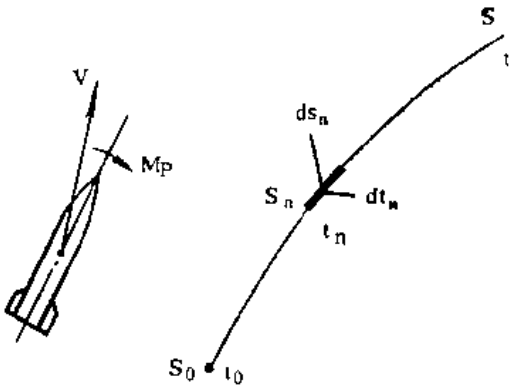


图 6-20 格林函数法示意图

在 M_P 单独作用下，在 dt_n 时间内产生的微小摆动角速度为 $d\dot{\varphi}_n$，则根据动量矩定理有

$$A\frac{d\dot{\varphi}_n}{dt_n} = M_P 。$$

或
$$d\dot{\varphi}_n = \frac{P \cdot \Delta}{m \cdot A/m}\, dt_n = \frac{a_P \cdot \Delta}{R_\Delta^2} dt_n 。 \tag{6-63}$$

在 § 3 节中我们已经导出了在 $S = S_0$ 处起始扰动 $\dot{\varphi}_0$ 在弧长 S 处的攻角和偏角为

$\delta_{\dot{\varphi}_0} = \dot{\varphi}_0 \cdot \delta^*_{\dot{\varphi}_0}(u, u_0)$，　　参见（6-39）式。

$\psi_{\dot{\varphi}_0} = \dot{\varphi}_0 \cdot \psi^*_{\dot{\varphi}_0}(u, u_0)$，　　参见（6-54）式。

现在的微摆动角速度 $d\dot{\varphi}_n$ 不是作用在 S_0 处而作用在 S_n 处，所以引用上述结果时，需把 u_0 改为 $u_n = k_u \cdot S_n$，故由扰动 $d\dot{\varphi}_n$ 在弧长为 $S(S \geqslant S_n)$ 处所产生的微小攻角和偏角分别为

$$\left.\begin{aligned} d\delta_\Delta &= d\dot{\varphi}_n \cdot \delta^*_{\dot{\varphi}_0}(u, u_n), \\ d\psi_\Delta &= d\dot{\varphi}_n \cdot \psi^*_{\dot{\varphi}_0}(u, u_n)。 \end{aligned}\right\} \tag{6-64}$$

将推力偏心矩 M_P 在各弧段上的扰动所引起的在弧长为 S 处的微小攻角和偏角值叠加起来，即得总的攻角 δ_Δ 和偏角 ψ_Δ。当 dt_n 取为无限小时，叠加可用积分代替，即：

$$\left.\begin{aligned} \delta_\Delta &= \sum_{i=1}^{n} d\dot{\varphi}_n \delta^*_{\dot{\varphi}_0}(u, u_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_P \Delta}{R_\Delta^2} dt_n \cdot \delta^*_{\dot{\varphi}_0}(u, u_n) \\ &= \int_{t_0}^{t} \frac{a_P \cdot \Delta}{R_\Delta^2} \delta^*_{\dot{\varphi}_0}(u, u_n)\, dt_n, \\ \psi_\Delta &= \int_{t_0}^{t} \frac{a_P \cdot \Delta}{R_\Delta^2} \psi^*_{\dot{\varphi}_0}(u, u_n)\, dt_n 。 \end{aligned}\right\} \tag{6-65}$$

上式中被积函数是两者之积，第一项是 (6-23)② 式中的非齐次项，第二项是特征函数，它反映了齐次方程的性质。因而能正确反映非齐次方程的特解。

将 (6-62) 式 dt_n 值、(6-39) 式 $\delta^*_{\dot{\varphi}_0}$ 值、(6-49) 式 $\psi^*_{\dot{\varphi}_0}$ 值代入 (6-65) 式，并注意到 $V = \sqrt{2\bar{a}S}$、$V_n = \sqrt{2\bar{a}S_n}$，$u = k_u S$，可得

$$\left.\begin{aligned} \delta_\Delta &= \frac{\Delta}{2k_u R_\Delta^2}\left(\frac{a_P}{\bar{a}}\right)\int_{u_0}^{u} e^{-b(u-u_n)} \frac{\sin(u-u_n)}{\sqrt{uu_n}} du_n, \\ \psi_\Delta &= \int_{s_0}^{s} \frac{a_P \cdot \Delta}{R_\Delta^2 V_n} \cdot C_3 \sqrt{\frac{\pi}{k_u \bar{a}}} R_{\dot{\varphi}_0}(u, u_n)\, dS_n \\ &= C_3 \frac{\Delta}{R_\Delta^2 k_u}\left(\frac{a_P}{\bar{a}}\right)\int_{u_0}^{u} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2u_n}} R_{\dot{\varphi}_0}(u, u_n)\, du_n 。 \end{aligned}\right\} \tag{6-66}$$

求攻角 δ_Δ 的 (6-65) 式，使用较少，而求 ψ_Δ 的 (6-66) 式用得较多，故令函数

$$R_\Delta(u, u_0) = \int_{u_0}^{u} \sqrt{\frac{\pi}{2u_n}} R^*_{\varphi_c}(u, u_n)\, du_n \ 。 \tag{6-67}$$

把 $R_\Delta(u, u_0)$ 函数事先计算好并编成表格，（该函数参见参考文献[3]附表 21）。于是

$$\psi_\Delta = \frac{C_3 \Delta}{k_u \cdot R_\Delta^2}\left(\frac{a_P}{\bar{a}}\right) \cdot R_\Delta(u, u_0)。 \tag{6-68}$$

记推力偏心矩 Δ 等于 1 个单位长度时所产生的偏角 $\psi_{\Delta=1}$ 为其特征函数 ψ^*_Δ。则

$$\psi^*_\Delta = \frac{C_3}{k_u R_\Delta^2}\left(\frac{a_P}{\bar{a}}\right) \cdot R_\Delta(u, u_0)。 \tag{6-69}$$

实际上，推力偏心矩是一个随机变量，其大小和方向都是随机的。测量表明，若取过弹轴的某一平面，则它在该平面的投影大致是正态分布，设其中间偏差为 E_Δ，则得偏角散布为

$$E(\psi_\Delta) = E_\Delta \cdot \psi^*_\Delta \ 。 \tag{6-70}$$

二、特解攻角和偏角的特点及减少偏角的措施

特解特征函数 δ^*_Δ 和 ψ^*_Δ 随 $(u-u_0)$ 的变化图象，如图 6-21 示所。

图中 $\delta^*_\Delta(u-u_0)$ 曲线不对称于横轴，其对称轴为图中的点划线，幅值是逐渐衰减的。曲线的平均位置即平均攻角，也称为动力平衡角。平均攻角对应于总力矩为零的运动状态。正如理论力学中振动问题同样，振动的平衡位置就是外界干扰力与弹簧力相等的那个位置。关于动力平衡角的物理意义，后面还要叙述。弹轴摆动的平衡位置，即对应于 $M_P = M_u$ 的位置，则在平均攻角 $\bar{\delta}_\Delta$ 时，有下列关系存在：

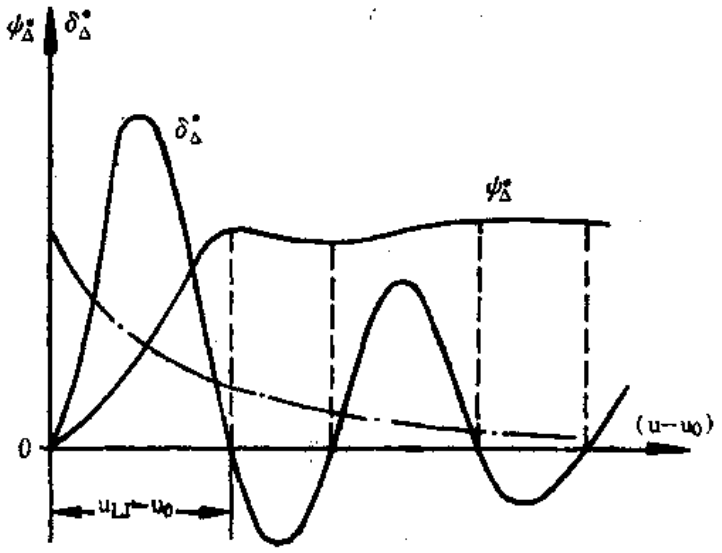


图 6-21　特解偏角 ψ^*_Δ 和特解攻角 δ^*_Δ 与 $(u-u_0)$ 关系图

$$P \cdot \Delta = \frac{1}{2}\rho V^2 S l C'_m \cdot \bar{\delta}_\Delta \ ,$$

由　$V^2 = 2\bar{a}S$，$u = k_u S$，

故

$$\bar{\delta}_\Delta = \frac{P\Delta}{m} \Big/ \frac{A}{m} \frac{1}{\frac{\rho S l C'_m V^2}{2A}} = \frac{a_P \Delta}{R_\Delta^2 k_u^2 V^2} = \frac{\Delta(a_P/\bar{a})}{2R_\Delta^2 k_u \cdot u} \ 。 \tag{6-71}$$

从上式可见，$\bar{\delta}_\Delta$ 与 u 或反比，离滑轨时 u 最小，$\bar{\delta}_\Delta$ 最大。为减小 $\bar{\delta}_\Delta$，从而减少 δ 的幅值，应设法增大有效滑轨长度，以增大 u 值。

从图 6-21 还可看出，ψ^*_Δ 在 δ 的头半个周期内增长较快，当到达第一个极大值后，曲线虽有波动，但变化幅度不大。称增长较快的这一段为临界段，因为 δ 不对称于横轴，所以它的临界段比 $\psi^*_{\varphi_c}$ 的临界段稍长，已超过半个周期，但小于一个周期。故临界段长度大致为

$$S_{LJ}-S_0=(0.7\sim0.8)\lambda。$$

而 $u_t=k_u S_0$（见本章§3、四），因此 u_{LJ} 是 u_0 的函数，而 $R_\Delta(u_{LJ},u_0)$ 也是 u_0 的函数。在

$$0.6\leqslant u_0\leqslant 1.0$$

的范围内，可将 $R_\Delta(u_{LJ},u_0)$ 用下列简单函数表示：

$$R_\Delta(u_{LJ},u_0)=\frac{0.195}{u_0+0.322} \tag{6-72}$$

用临界段末的偏角 ψ_Δ 值代替主动段末（K点）的偏角值，不会产生明显的误差。

推力偏心矩 M_P 所产生的偏角，是造成火箭弹散布的主要因素。减小因推力偏心矩而产生散布的方法有：

1．减少偏心距离 Δ，可以从改进喷管截面变化的对称性；加工装配时保证喷管与弹轴的同轴性；改进燃料装药的对称性和均匀性等方面着手，这有待于在设计制造工作中研究改进。

2．增加有效滑轨长度，采用顺飞行方向发射或炮射火箭弹的方法，可增大射程并减小散布。

3．增长滑轨长度，采用这一方法在飞机上受到限制。

4．增加尾翼“强度”，使稳定力矩增大，从而使偏角减小。而增大尾翼“强度”的有效方法是增大尾翼的翼展。但这会引起阻力和升力增大，且结构尺寸增大，给维护使用带来不便。需全面考虑。

5．采用使火箭弹绕弹轴低速自转的方法，以便使 M_P 及其它一些不对称因素在各个方位上都有作用，从而抵消一部分偏角，达到减小 ψ_Δ 的目的。但这种措施必须保证在临界段内有足够的转速才能见效。

§6 无推力尾翼式弹丸的摆动运动

当火箭弹进入被动段时，以及无推力的炸弹（包括其他无推力的尾翼弹丸），它们在弹道上的摆动运动，有相同的特点，如图 6-22 所示。图中约定以水平线为基准参考线，θ 为弹道切线倾角；φ 为摆动角；δ 为攻角，约定从各自的基准线起，逆时针为其正向。显然，图 6-22 是弹丸在射击平面内的摆动运动及其受力图。同火箭弹主动段内的摆动一样，无推力尾翼弹丸的摆动，也是空间的摆动，也可以分解为在铅垂平面内的摆动及垂直于铅垂平面的

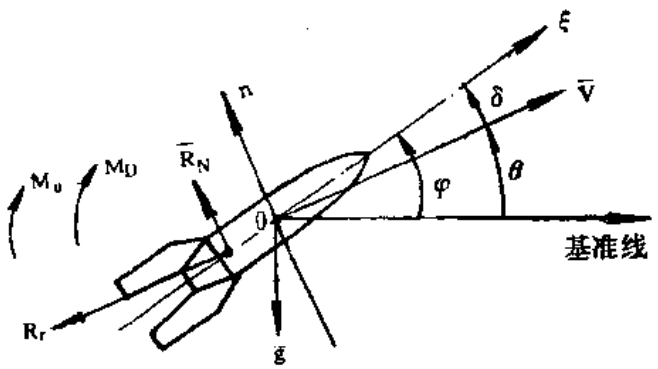


图 6-22 无推力尾翼弹在铅垂平面内的运动图

倾斜平面内的摆动来讨论。而在两个平面内的摆动，也都具有相类似的性质。所以我们取如图 6-22 所示的铅垂平面（即射击面）内的摆动运动为例，讨论其摆动过程。

一、摆动运动微分方程组及其通解

如图 6-22，建立摆动运动微分方程组

1．对速度方向（切线方向），有

$$m\frac{dV}{dt}=-R_x-q\sin\theta\ 。$$

由 (6-19) 式 $R_x=\frac{1}{2}\rho V^2SC_x$，而 $b_x=\frac{1}{2m}\rho SC_x$，得

$$\frac{dV}{dt}=-b_xV^2-g\sin\theta。\tag{6-73}$$

2．对法线方向，有

$$mV\frac{d\theta}{dt}=R_N-q\cos\theta。$$

由 (6-19) 式 $R_N=\frac{1}{2}\rho V^2SC_y'\delta$，而 $b_y=\frac{\rho SC_y'}{2m}$，得

$$\frac{d\theta}{dt}=b_yV\delta-\frac{g\cos\theta}{V}\ 。\tag{6-74}$$

3．由动量矩定理，有

$$A\frac{d^2\varphi}{dt}=-M_u-M_D。$$

式中：稳定力矩 $M_u=\frac{1}{2}\rho V^2SlC_m'\delta$，由 (6-18) 式 $k_u=\sqrt{\frac{\rho SlC_m'}{2A}}$，

赤道阻尼力矩 $M_D=\frac{1}{2}\rho VSl^2C_D'\dot{\varphi}$，由 (6-18) 式 $k_D=\frac{\rho Sl^2C_D'}{2A}$，得

$$\frac{d^2\varphi}{dt}=-k_u^2V^2\delta-k_DV\dot{\varphi}。\tag{6-75}$$

故有

$$\left.\begin{aligned}&\dot{V}=-b_xV^2-g\sin\theta,&①\\&\dot{\theta}=b_yV\delta-\frac{g\cos\theta}{V}&②\\&\ddot{\varphi}=-k_u^2V^2\delta-k_DV\dot{\varphi},&③\\&\text{联系方程}\quad\varphi=\delta+\theta\ 。&④\end{aligned}\right\}\tag{6-76}$$

上式中①式为质心运动方程式，后面将证明摆动运动在已知初始条件下，由②、③、④式联立求解。而与①式无关。

我们仍以园点“·”表示变量对时间 t 的导数。

由 (6-76)④ 式微分 2 次，得

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\varphi}=\dot{\theta}+\dot{\delta}\ ,\\&\ddot{\varphi}=\ddot{\theta}+\ddot{\delta}\ 。\end{aligned}\right\}\tag{6-77}$$

将②式 $\dot{\theta}=b_y V\delta-\frac{g\cos\theta}{V}$，再对 t 求导一次，得

$$\ddot{\theta}=b_y V\dot{\delta}+b_y\delta\dot{V}+\frac{\dot{\theta}g\sin\theta}{V^2}+\frac{\dot{V}g\sin\theta}{V^2} \tag{6-78}$$

把 (6-77) 式及 (6-78) 式代入 (6-76)③ 式，并经整理，得

$$\ddot{\delta}+(k_D+b_y)V\dot{\delta}+\left(k_u^2+k_D b_y-b_x b_y-\frac{b_y g\sin\theta}{V^2}+\frac{b_y g\sin\theta}{V^3}\right)V^2\delta$$

$$=g\cos\theta\left(k_D+b_x+\frac{g\sin\theta}{V^2}+\frac{g\sin\theta}{V^3}\right)。$$

上式中，可略去左端第二个括号内比 k_u^2 小得多的其它项及右端括号内的末项，得

$$\ddot{\delta}+(k_D+b_y)V\dot{\delta}+k_u^2V^2\delta=g\cos\theta\left(k_D+b_x+\frac{g\sin\theta}{V^2}\right)。 \tag{6-79}$$

这是一个变系数非齐次微分方程，我们可采用同 § 3 节一样的变量置换方法，把对时间 t 的微分改为对弧长 s 的微分。由 $\frac{ds}{dt}=V$

作变换：

$$\dot{\delta}=\frac{d\delta}{dt}=\frac{d\delta}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\delta' V \quad 。 \tag{6-80}$$

以撇号 “ ′ ” 代表变量对 s 的微分，则

$$\ddot{\delta}=\frac{d}{dt}(\delta' V)=\frac{d}{ds}(\delta' V)\cdot\frac{ds}{dt}=(\delta'' V+\delta' V')V=\delta'' V^2+\delta' V' V \quad 。$$

而

$$\dot{V}=\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=V'\cdot V \quad 。$$

故

$$V'=\frac{\dot{V}}{V}。$$

代入 $\ddot{\delta}$ 式中，得

$$\ddot{\delta}=\delta'' V^2+\delta'\dot{V} \tag{6-81}$$

将 (6-80) 式、(6-81) 式以及 (6-76)① 式代入 (6-79) 式，整理之得。

$$\delta'' V^2+\left(b_y+k_D-b_x-\frac{g\sin\theta}{V^2}\right)V^2\delta'+k_u^2V^2\delta=g\cos\theta\left(k_D+b_x+\frac{g\sin\theta}{V^2}\right)。 \tag{6-82}$$

上式中等式左边乃是一个二阶常系数齐次微分方程

$$\delta''+2b\delta'+k_u^2\delta=0。 \tag{6-83}$$

式中把 b 视为常量，

$$b=\frac{1}{2}\left(b_y+k_D-b_x-\frac{g\sin\theta}{V^2}\right)。$$

(6-83) 式的特征方程为 $r^2+2b r+k_u^2=0$ 。

解得 $r_{1,2}=-b\pm jk_u$ 是一个共轭复根(略去 $b\ll k_u$ 的 b)，故通解为。

$$\delta=e^{-bs}(C_1\cos k_u S+C_2\sin k_u S)。 \tag{6-84}$$

C_1、C_2 为待定系数，代入初始条件后可求得其值。

二、初始条件所对应的通解

1、当 $t=0$：$S=0$，$\delta=0$，$\delta'=\dot{\delta}_0/V_0$ 时。

将初始条件代入(6-84)式，得　$C_1=0$，$C_2=\dfrac{\dot{\delta}_0}{V_0 k_u}$。

故
$$\delta_{\beta_0}=\frac{\dot{\delta}_0}{V_0 k_u}\cdot e^{-bs}\sin(k_u\cdot S)。\tag{6-85}$$

或
$$\delta_{\beta_0}=\delta_{m_0}\cdot e^{-b\bar{V}t}\sin(k_u\bar{V}\cdot t)。\tag{6-86}$$

式中 δ_{m_0} 为起始攻角幅值，$\bar{V}$ 为平均速度。

$$\delta_m=\delta_{m_0}\cdot e^{-b\bar{V}t}=\frac{\dot{\delta}_0}{V_0 k_u}e^{-b\bar{V}t}。\tag{6-87}$$

可知 δ_{β_0} 是一个以起始幅值为 $\delta_{m_0}=\dfrac{\dot{\delta}_0}{V_0 k_u}$，并按 $e^{-b\bar{V}t}$ 衰减的正弦振动，周期为

$$T=\frac{2\pi}{\bar{V}k_u}。\tag{6-88}$$

其图象如图 6-23 所示。

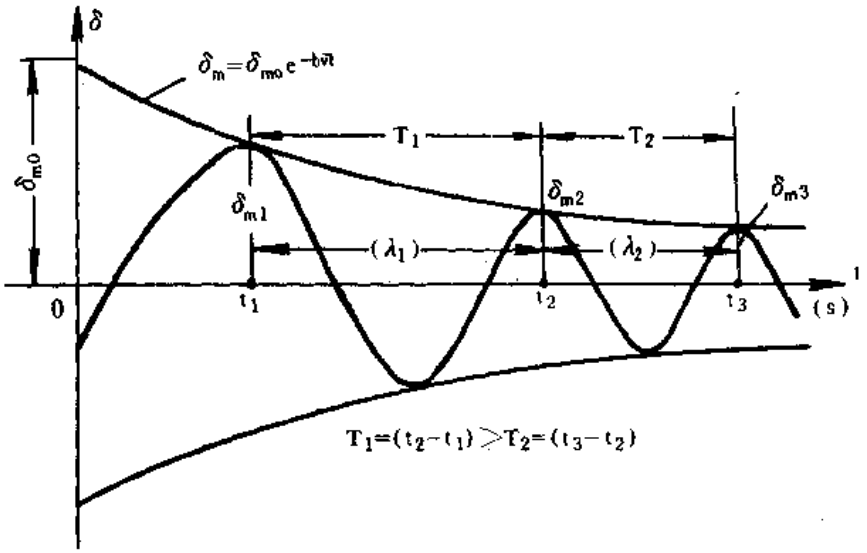


图 6-23　无推力尾翼弹 $\delta-t$ 关系图

由于摆动运动，将使速度方向偏离原来的方向，产生偏角 ψ_{β_0}，其值即为(6-76)②式中不计重力加速度 g 的作用时的积分值。因为重力$\left(\dfrac{g\cos\theta}{V}\right)$项使速度方向正常向下偏转，故偏角为 $\dot{\psi}\approx b_y V\delta$ 的积分值。将 $\dot{\psi}$ 变换为 ψ'，得

$$\psi'=b_y\delta。$$

故得
$$\psi_{\beta_0}=\frac{b_y\dot{\delta}_0}{V_0 k_u}\int_0^S e^{-bs}\sin(k_u S)\,dS$$

$$=\frac{b_y}{k_u^2}\cdot\frac{\dot{\delta}_0}{V_0}[1-e^{-bs}\cos(k_u S)]①。\tag{6-89}$$

① 积分时，略去积分结果中某些比较小的含 b 的项。

因而平均偏角

$$\bar{\psi}_{\delta_0} = \frac{b_y}{k_u^2}\frac{\dot{\delta}_0}{V_0} = \frac{C_y'}{C_m'}\cdot\frac{R_A^2}{l}\frac{\dot{\delta}_0}{V_0}。 \tag{6-90}$$

将(6-9)式 $\frac{h}{l}\approx\frac{C_m'}{C_y'}$ 代入，得

$$\bar{\psi}_{\delta_0} \doteq \frac{R_A^2}{h}\cdot\frac{\dot{\delta}_0}{V_0} \tag{6-91}$$

图 6-24 示出了偏角 ψ_{δ_0} 与 S 的关系曲线。

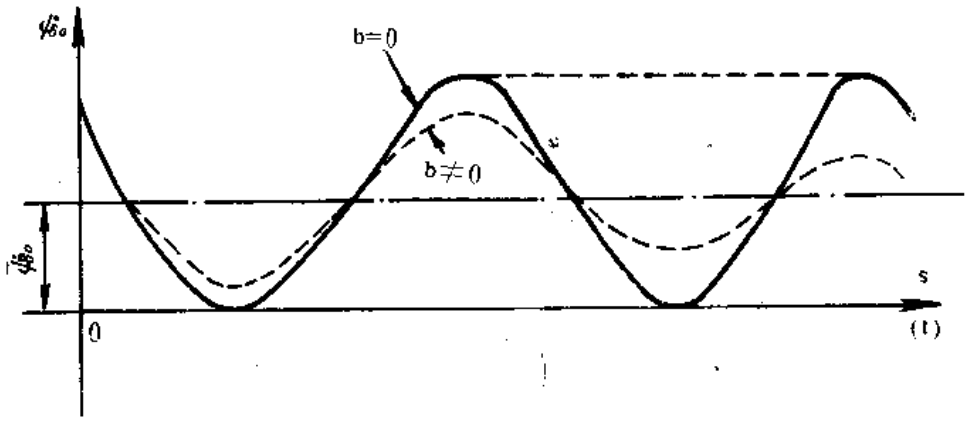


图 6-24　无推力尾翼弹偏角 ψ_{δ_0}

2、当 $t=0$：$s=0$，$\dot{\delta}=0$，$\delta'=0$，$\delta=\delta_0$ 时，

将初始条件代入(6-84)式，求得

$$C_1=\delta_0,\qquad C_2=\frac{b\delta_0}{k_u}。$$

故

$$\delta_{\delta_0}=\delta_0 e^{-bs}\left(\cos k_u S+\frac{b}{k_u}\sin k_u S\right)。 \tag{6-92}$$

其偏角为

$$\psi_{\delta_0}=b_y\int_0^s\delta_{\delta_0}\,ds=b_y\int_0^s\delta_0 e^{-bs}\left(\cos k_u S+\frac{b}{k_u}\sin k_u S\right)ds$$

$$=\frac{b_y\delta_0}{k_u}\left(\frac{b}{k_u}+e^{-bs}\sin k_u S\right)。 \tag{6-93}$$

积分计算时，略去积分结果中某些比较小的含 b 的项。

平均偏角

$$\bar{\psi}_{\delta_0}=\frac{b\,b_y\delta_0}{k_u^2}=b\frac{C_y'}{C_m'}\cdot\frac{R_A^2}{l}\delta_0\approx b\frac{R_A^2}{h}\delta_0。 \tag{6-94}$$

线性微分方程的解具有叠加性，而 ψ_0 则使速度方向在 $t=0$ 时就偏离 V_0 的方向。故总偏角的幅值为：

$$\psi=\sqrt{\psi_0^2+\psi^2_{\delta_0}+\psi^2_{\dot\delta_0}}=\sqrt{\psi_0^2+\bar\psi^2_{\delta_0}+\bar\psi^2_{\dot\delta_0}}\ 。\qquad (6\text{-}95)$$

对于火箭弹道被动段，初始值均应指K点的数值。

由上述，可得出如下几点结论：

1）不管那种起始条件，均引起偏角，由于各发弹的起始条件的大小和方位均为随机量，因而引起散布；

2）平均偏角的大小与 $\dot\delta_0$ 及 δ_0 的大小成正比；

3）平均偏角与 h 成反比。

因此投射尾翼弹丸时，限制初始 $\dot\delta_0$ 及 δ_0 可减少散布。在设计弹丸时适当增大二心距 h，也能减少散布，但由于弹丸结构所限，h 不能增得过大。

至于由起始 $\dot\delta_0$ 及 δ_0 所产生的攻角 $\delta_{\dot\delta_0}$ 及 δ_{δ_0} 值，在它们的方向相同时，可以用三角函数的变换方法把它们叠加在一起，

根据（6-85）式及（6-92）式有

$$\delta_{\dot\delta_0}=\frac{\dot\delta_0}{V_0k_u}e^{-bs}\sin(k_uS)。\qquad \text{见(6-85)}$$

$$\delta_{\delta_0}=\delta_0e^{-bs}\left(\cos k_uS+\frac{b}{k_u}\sin k_uS\right)。\qquad \text{见(6-92)}$$

在（6-92）式中略去 $b\ll k_u$ 的项，得

$$\delta=\delta_{\dot\delta_0}+\delta_{\delta_0}=e^{-bs}\left(\frac{\dot\delta_0}{V_0k_u}\sin k_uS+\delta_0\cos k_uS\right)。$$

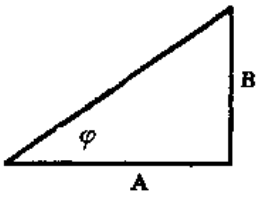
作一个直角三角形，

令

$$\frac{\dot\delta_0}{V_0k_u}=A,\quad \delta_0=B,\quad \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\varphi,\quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\varphi\ 。$$

则有

$$\begin{aligned}\delta&=\sqrt{A^2+B^2}\,e^{-bs}(\cos\varphi\cdot\sin k_uS+\sin\varphi\cos k_uS)\\&=\sqrt{A^2+B^2}\,e^{-bs}\sin(k_uS+\varphi)\\&=\sqrt{\left(\frac{\dot\delta_0}{V_0k_u}\right)^2+\delta_0^2}\,e^{-bs}\sin(k_uS+\varphi)。\end{aligned}\qquad (6\text{-}96)$$



式中：$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{B}{A}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\delta_0\cdot V_0k_u}{\dot\delta_0}$，称为初相角；$S=\bar V\cdot t$。

所以攻角 δ 的变化乃是以 $\sqrt{\left(\frac{\dot\delta_0}{V_0k_u}\right)^2+\delta_0^2}\,e^{-b\bar Vt}$ 为振幅，以 $(k_u\bar Vt+\varphi)$ 为相角，以 φ 为初相角的简谐振动，仍以 $T=\frac{2\pi}{\bar Vk_u}$ 为周期。

在 $\dot\delta_0$ 和 δ_0 的方向相近的情况下，（6-96）式具有普遍意义。而在 $\dot\delta_0$ 和 δ_0 的方向相差较大的情况下，也仍可视为 δ 是以上述振幅和周期的简谐振动，但初相角 φ 有不同的值。

三、摆动运动微分方程式的特解——动力平衡角

非齐次方程式（6-79）的特解，可以这样来求解，由于摆动是衰减的，故可以认为经过

一段时间之后，摆动已衰减至趋于零，这时 $\dot{\delta}\doteq 0$，$\ddot{\delta}\doteq 0$，则

$$\delta_P = \frac{g\cos\theta}{k_u^2 V^2}\left(k_D + b_x + \frac{g\sin\theta}{V^2}\right) \tag{6-97}$$

称 δ_P 为动力平衡角。它是攻角的一个非周期项，与平均攻角相当。其形成的物理本质可说明如下：

由于重力的作用，弹道切线以角速度 $|\dot{\theta}|$ 不断向下转动，具有角加速度为 $|\ddot{\theta}|$。设计得好的弹丸也就是静态稳定性良好的弹丸，当弹道切线(即速度矢量)向下转动，形成在铅垂平面内的新攻角 δ 时，会产生与此攻角相应的稳定力矩 M_u，迫使弹轴追随速度矢量线的转向而转向。理想的情况是由于新攻角 δ 的产生而产生的稳定力矩 $Ak_u^2V^2\delta$ 和由弹轴的摆动而产生的阻尼力矩 $Ak_DV\dot{\varphi}$（$\dot{\varphi}$ 指在铅垂平面内的摆动角速度）的和，恰好使弹轴在铅垂平面内的摆动角加速度 $\ddot{\varphi}$ 的大小和方向与速度矢量线（即切线）向下转动的角加速度 $|\ddot{\theta}|$ 的大小和方向相同。在此情况下，在铅垂平面内尾翼弹弹轴对速度矢量方向线之间，必然要有一个滞后攻角 δ_P，因而产生相应的稳定力矩，以保证弹轴摆动角加速度和角速度与切线向下转动的角加速度和角速度相等或接近相等。这个弹轴对速度矢量方向线的滞后攻角就是我们习惯上说的动力平衡角，也就是摆动运动微分方程式的特解。尾翼弹追随速度矢量向下转动而转动的性能，叫做尾翼弹的追随稳定性。

根据上述的理解，得到弹轴的摆动方程为

$$A\ddot{\varphi} = -Ak_u^2V^2\delta_P - Ak_DV\dot{\varphi} \quad （参阅 6-76③式）。$$

而这时

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\theta}, \quad \dot{\varphi} = \dot{\theta} \ 。$$

把上述值代入 (6-76)③ 式得，

$$\delta_P = \frac{1}{k_u^2V^2}(|\ddot{\theta}| - k_DV\dot{\theta})。 \tag{6-98}$$

实际上，可认为由于速度矢量方向向下转动，所产生的稳定力矩保持攻角在某一稳定值 δ_P。由于 $\delta = \delta_{通解} + \delta_{特解}$，故可认为弹丸绕动力平衡角 δ_P 位置作新的衰减摆动。

保证追随稳定性所需的最大动力平衡角（发生在弹道顶点附近）不宜过大，由 (6-97) 式可看出，在弹道顶点处，$\theta = 0°$，有 $\delta_{P\max}$ 值，对于稳定性良好的尾翼弹，k_u 足够大，可算得 $\delta_{P\max}$ 约为 $1°\sim 3°$。

由于动力平衡角的存在，使迎面阻力略为增大，升力也略为增大。因此，使弹着点产生系统误差，可以理论计算后予以修正。对于射程不太大的弹丸，其影响也可以忽略，或经试射后，在弹道系数 C 中修正。

§7 尾翼弹丸的散布、减少散布的措施及稳定飞行的条件

一、尾翼弹丸的散布

由于各发弹丸受到各种随机起始干扰的不同，以及各发弹丸外形和加工的公差和弹道风等原因，各发弹丸的实际弹着点与理论弹着点之间就产生偏差。这种偏差，若在地平面上可分为方向偏差和距离偏差；若在垂直于弹道的平面上，则可分为高低和方位两个偏差。统称为弹着点的散布，不管距离和方向（高低或方位）偏差，都可用角偏差（或角散布）来表示。

对于火箭弹来说，推力偏心矩是造成散布的主要因素，也因此使火箭弹丸的散布比无推力弹丸的散布大好几倍到几十倍。因而火箭弹的主动段末K点处的偏角ψ_K是造成散布的主要因素。

如果已经测出起始扰动φ_0的中间偏差为E_{φ_0}，那么主动段末的偏角中间偏差便是：

$$E(\psi_{\varphi_0}) = E_{\varphi_0} \cdot \psi^*_{\varphi_0}(u_0, u_K)。 \tag{6-99}$$

由于在高低和方位上都有其E_{φ_0}值，因此造成弹着点的高低或方位（距离或方向）的散布。

对于其它起始干扰φ_0，ψ_0和推力偏心距Δ，也仿照上述方法，分别会产生弹着点的散布。

1．高低角散布或距离散布

在铅垂平面内出现偏角ψ_{KC}时，也就是K点处的弹道切线倾角θ_K产生了偏差$\Delta\theta_K = \psi_{KC}$。（下面均以$E$表示中间偏差，单位：千分。以△表示偏差。）

因此高低角散布$E_{\Delta\theta K} = E_{\psi KC}$，如图6-25所示。

这个高低角偏差便在地面上产生距离偏差（或射程偏差）。

由于射程X是（C，V_0，θ_0）的函数，（在被动段是起始参数C_K，V_K，θ_K的函数）。故有

$$\Delta X = \frac{\partial x}{\partial C_K}\Delta C_K + \frac{\partial x}{\partial V_K}\Delta V_K + \frac{\partial x}{\partial \theta_k}\Delta\theta_k 。$$

其中间偏差为

$$E_x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial C_K}\right)^2 \cdot E^2_{\Delta C_K} + \left(\frac{\partial x}{\partial V_K}\right)^2 \cdot E^2_{\Delta V_K} + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_K}\right)^2 \cdot E^2_{\Delta\theta_K}} \tag{6-100}$$

式中：C_K为被动段弹道系数，$E_{\Delta C_K}$、$E_{\Delta V_K}$、$E_{\Delta\theta_K}$均为中间偏差值。

在射角较小时，由射角的偏差$\Delta\theta_K$所产生的射程误差占主要地位，空中射击时，一般射角较小，故由$\psi_{KC} = \Delta\theta_K$产生主要射程偏差。则有

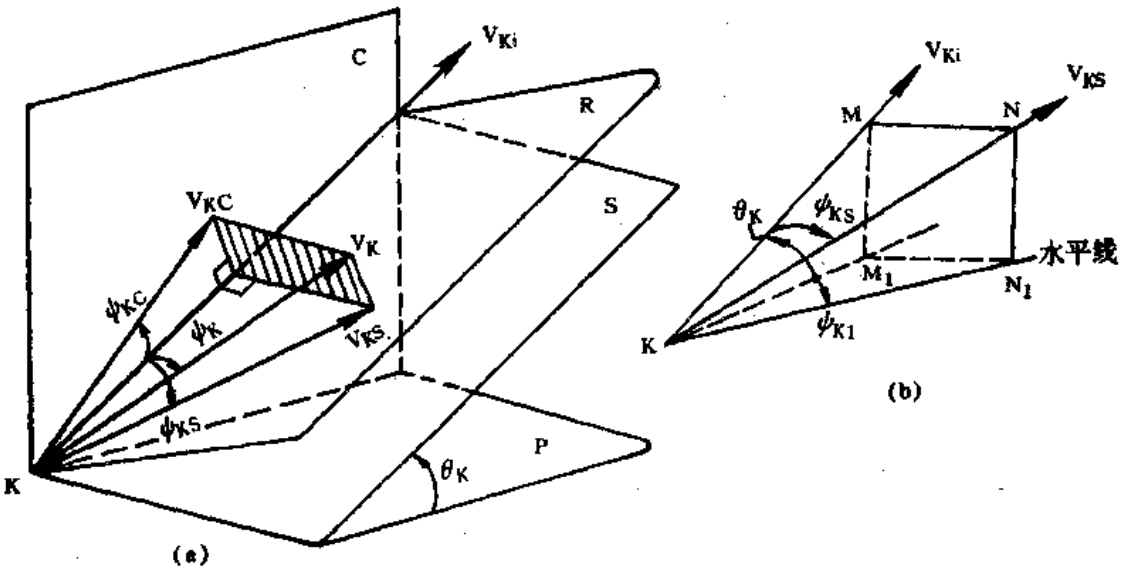


图 6-25　高低角偏差ψ_{KC}和方位角偏差ψ_{KS}图

（a）高低偏差（在铅垂平面C内）和方位偏差（在倾斜平面S内）的示图

（b）投影关系图

$$\Delta X \doteq \frac{\partial x}{\partial \theta_K}\Delta\theta_{K\beta} \tag{6-101}$$

若令 $\frac{\partial x}{\partial \theta_K} = Q_{\theta K}$ （是可以求得的）

则
$$\Delta X \doteq Q_{\theta K}\cdot\Delta\theta_K = Q_{\theta K}\cdot\psi_{KC}\ 。 \tag{6-102}$$

且有
$$E_x \doteq |Q_{\theta K}|\cdot E_{\psi KC}\ 。 \tag{6-103}$$

2．方位角散布 $E_{\psi_{KS}}$ 或方向散布 E_z

在垂直于理论速度 V_{Ki} 方向的平面内，产生侧方向的偏差角，若为 ψ_{KS}，则称为方位角偏差，因而方位角散布为 $E_{\psi_{KS}}$。如图 6-25(*b*) 所示。

若被动段的射程 X_b 近似用全射程 X 代替，那么弹着点的侧向偏差 Z 为

$$Z = X\cdot \operatorname{tg}\psi_{K1}\ 。$$

由于 ψ_{K1} 是 ψ_{KS} 在水平面上的投影，其值不太大，故 $\operatorname{tg}\psi_{K1}\approx\psi_{K1}$，由几何关系得

$$\operatorname{tg}\psi_{K1} = \frac{M_1N_1}{M_1K} = \frac{M_1N_1}{MK\cos\theta_K} = \frac{MN}{MK\cos\theta_K} = \frac{\operatorname{tg}\psi_{KS}}{\cos\theta_K}。$$

ψ_{KS} 值也不大，故

$$Z = X\cdot\frac{\psi_{KS}}{\cos\theta_K}。 \tag{6-104}$$

方向散布

$$E_Z \approx X\cdot E_{\psi_{KS}}/\cos\theta_K\ 。 \tag{6-105}$$

要提高弹着点的密集度，就需要减少散布，也就要减小偏差量。下面讨论如何减少尾翼弹丸的散布问题。

二、减少尾翼弹丸散布的措施及其飞行稳定条件

从前面的分析可知，尾翼弹丸的散布，是由于出现了摆动，也即由于有攻角出现的缘故，而使速度矢量偏离理想弹道切线的方向。为了减少散布，就要限制 δ 的变化。

由保证尾翼弹丸稳定飞行的条件，可得到减小散布的措施。要使尾翼弹飞行稳定且摆动要小，由 (6-87) 式及 (6-96) 式可知。

1．需限制攻角的幅值 δ_{m_0}，在有 $\dot\delta_0$ 及 δ_0 的普遍情况下，有

$$\delta_{m_0} = \sqrt{\left(\frac{\dot\delta_0}{V_0k_u}\right)^2 + \delta_0^2}$$

要保证弹丸在飞行中不致摆动太厉害，需限制 $\delta_m < \delta_{max}$，而一般要求 δ_{max} 不超过 6°～8°。把上述关系代入并整理之，得

$$k_u^2 \geqslant \frac{\dot\delta_0^2}{V_0^2(\delta^2_{max} - \delta_0^2)}\ 。$$

即
$$\frac{\rho S l C'_m}{2A} \geqslant \frac{\dot\delta_0^2}{V_0^2(\delta^2_{max} - \delta_0^2)}\ 。$$

故

$$C_m^{\prime} \geqslant \frac{2\dot{\delta}_0^2}{V_0^2(\delta_{max}^2 - \delta_0^2)} \frac{A}{\rho S l} 。 \tag{6-106}$$

要保证上式成立，必须做到：

① $\dot{\delta}_0$ 及 δ_0 要小，这就要求投弹（或发射时）飞机要稳定地飞行，不要摆动太厉害；

② 要使 $C_m^{\prime}$ 增大，必须增大尾翼的“强度”，并增大压心到质心的距离 h；

③ 低空弹道 ρ 大，弹丸飞行稳定性好；

④ V_0 增大时，稳定性好，故在飞机上向前方发射时，$V_{01} = V_0 + V_1$，更有利于弹丸的稳定飞行；

⑤ 弹丸长度 l 增大时，A 也会增大，故增大 l 效果不显著。

2．增大阻尼系数 b，使摆动衰减得快。阻尼项为 e^{-bs}，要使 b 足够大。而

$$b = \frac{1}{2}\left(b_y + k_D - b_x - \frac{g\sin\theta}{V^2}\right),$$

式中：$b_y = \frac{\rho S C_y^{\prime}}{2m}$；$k_D = \frac{\rho S l^2 C_D^{\prime}}{2A}$；$b_x = \frac{\rho S C_x}{2m}$。

故知要增大 $C_y^{\prime}$，$C_D^{\prime}$，S，l，而 m、A 要小，但上述这些参量都是互相制约的，在设计弹丸时要全面衡量，不可过分偏重某个参数。

3．减小摆动周期 T，由 (6-88) 式 $T = \frac{2\pi}{\overline{V} k_u}$，知 k_u 要大，其意义与 1 相同。而 T 小可使摆动频率快，波长 λ 短，如图 6-26 所示，以减少散布。

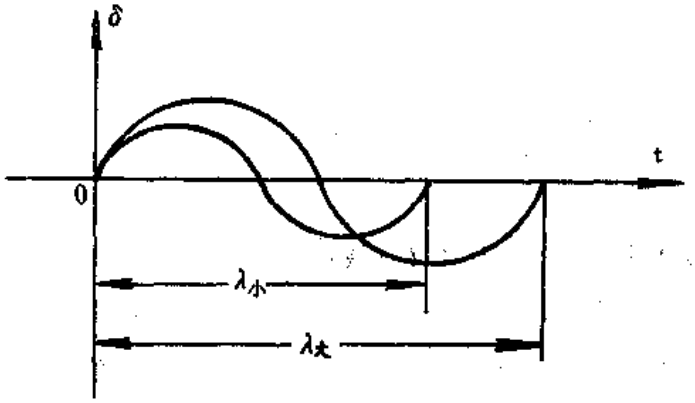


图 6-26　波长 λ 与攻角 δ 的关系图

4．保证平均偏角 $\bar{\psi}$ 足够地小，这就是偏角有限性条件，在有 $\dot{\delta}_0$ 及 δ_0 的初始条件下，由 (6-91) 及 (6-94) 式，有

$$\bar{\psi} = \sqrt{\left(\frac{R_A^2}{h}\frac{\dot{\delta}_0}{V_0}\right)^2 + \left(b\frac{R_A^2}{h}\delta_0\right)^2} \leqslant \bar{\psi}_{max} 。$$

式中：$\bar{\psi}_{max}$ 为规定的最大偏角值；h 为二心距。

则有

$$h \geqslant \frac{R_A^2}{\bar{\psi}_{max}}\sqrt{\left(\frac{\dot{\delta}_0}{V_0}\right)^2 + (b\delta_0)^2} 。 \tag{6-107}$$

5．其次，要使弹丸低速自转，以抵消弹丸各种因设计加工过程中的不对称因素，前面已有叙述。这里不准备多说。而要使弹丸低速自转，可采用斜置尾翼法或翼片平面斜切法；

对于多喷管发动机，可采用斜置喷管法等。而低速自转弹丸的转速，要避开“共振不稳定”现象。即避免当弹丸摆动一周期（或飞行一个波长）时，恰好自转一周的现象。因为这时弹丸会产生“共振”现象而使摆动角度突然增大，致使阻力突增，虽不致弹丸翻转，但也会使散布增大，甚至出现所谓“近弹”（即射程很近）现象。

设共振时的弹丸自转速度为 $\dot{r}_r$，根据实践经验则应设计弹丸的转速 $\dot{r} \geqslant 4\dot{r}_r$，才能防止共振不稳定现象的出现。

根据上述，当 $\dot{r}t = 2\pi$ 时，若恰好等于一个摆动周期 T，则 $\dot{r}$ 为共振转速 $\dot{r}_r$。当 $t = T$ 时，由 (6-88) 式：$T = \dfrac{2\pi}{\bar{V}k_u}$，得：

$$\dot{r}_r = \bar{V} \cdot k_u = \bar{V} \cdot \sqrt{\frac{\rho S l C_m^{\prime}}{2A}} \tag{6-108}$$

有关尾翼弹丸的导转及“共振稳定性”等设计问题，请参阅文献[1]

第六章 习 题

6-1 试将 (6-62) 式 dt_n、(6-38)′ 式 $\delta^*_{\dot{\varphi}_0}$ 及 (6-49) 式 $\psi^*_{\dot{\varphi}_0}$ 的值代入 (6-65) 式，求出 δ_Δ 及 ψ_Δ 的计算式来。

6-2 试积分求出 (6-89) 式（求 $\psi_{\dot{\delta}_0}$ 的公式）来。

6-3 试积分求出 (6-93) 式（求 ψ_{δ_0} 的公式）来。

6-4 设某无动力尾翼弹的参数如下：$V_0 = 200$ 米/秒、$b_x = 0.020 \times 10^{-2}$、$b_y = 0.20 \times 10^{-2}$、$k_D = 1.47 \times 10^{-2}$、$k_u^2 = 2.51 \times 10^{-2}$、$\theta_0 = 30°$、$\dot{\delta}_0 = 1$ 弧度/秒、$\delta_0 = 0.2$ 弧度，试分别求出由 $\dot{\delta}_0$ 及 δ_0 所产生的平均偏角值 $\bar{\varphi}_{\dot{\delta}_0}$、$\bar{\varphi}_{\delta_0}$ 及总偏角的幅值。

6-5 同上题参数，求 δ_{m_x}、周期 T 和摆动一周的波长 λ。

6-6 若某弹丸的参数同上题，作上仰、水平和俯冲轰炸，试求当① $\theta = 30°$、$V = 250$ 米/秒，② $\theta = 0°$、$V = 200$ 米/秒，③ $\theta = -30°$、$V = 240$ 米/秒，④$\theta = -60°$、$V = 300$ 米/秒时的动力平衡角 $\delta_{P\max}$ 值。

第三篇　弹道表的编制及应用电子计算机进行弹道计算的程序设计

第七章　弹道表的编制

§1　引　言

一、理论弹道与实际弹道及其误差

航空外弹道是在一系列假设条件下求解的，满足下列假设条件的弹道，称为理论弹道。

1．弹丸在整个运动时间内，攻角（或章动角）$\delta \doteq 0$；

2．弹丸是一个轴对称体；

3．不计地球曲率；

4．认为重力加速度的大小不变，方向始终铅直向下；

5．不计哥氏加速度；

6．地面气象条件是标准值，无风、雨，空中气温、气压按标准规律分布。

上述假设件条，对于航空弹丸的弹道基本上是合理的。但实际上，投射航空弹丸时的条件往往与假设条件有出入，因而造成弹道计算的误差。这是因为：

1．弹道上章动角 δ 往往不为零，在弹道的直线段，章动运动（或摆动）总是或大或小的存在着。在弹道的曲线段，也存在着动力平衡角。章动（或摆动）运动的影响，由于其初始条件是随机的，因而造成弹着点的随机散布。对于这个随机散布，在弹道求解中是无法修正的。而当 $\delta \neq 0$ 时，对阻力的影响从而对弹道诸元的影响，则可以合并入弹道系数中加以修正。

2．空中射击及中、低空轰炸弹道，射程较短，高度也不太高，因此地球曲率及重力加速度 g 的变化，对弹道的影响很小，可以忽略不计。只有高空轰炸弹道，才需要考虑地球曲率的影响，但我们把这种影响放到轰炸瞄准原理中去修正。

3．关于哥氏加速度问题，在射程小于 10 公里时，其影响较小，可以忽略。空中射击弹道一般只有几公里，故不必考虑修正。高空轰炸弹道，一般也不考虑其修正问题。

4．对于地面气象条件为非标准的情况下，在轰炸弹道中，可考虑用等效弹道系数 C' 给予修正，其方法见第四章。而对于射击弹道，则因其射程较短，弹道比较平直而不必修正。

5．在对地面目标射击和轰炸时，有风的情况下，风对弹道的影响，可放到瞄准原理中去修正。

6．对于弹丸在加工制造中产生的轴不对称性，其值较小且是随机数，所以只能在制造

工艺中加以限制和改进，在外弹道求解中，是无法修正的。

二、标准气象条件

空中射击弹道计算所采用的气象标准，同我国炮兵气象标准一样，称为炮兵气象标准。

1969年期间，空军领导机关组织有关科技人员，在制定1969年阻力定律的同时，对我国的气象情况作了广泛的调查统计，根据我国沿海和内陆作战特点，采用加权平均的方法得出了空军气象标准，适用于目前的轰炸弹道计算。有关炮兵气象标准和空军气象标准以及它们的差异参阅第一章的论述，这里不再重复。

基于上述，对航空射击弹道以及高、中、低空轰炸弹道，用上述假设条件下对质心运动微分方程式积分求解，所得到的弹道诸元编制成的弹道表，可称为理论弹道表（或理想弹道表）。理论弹道与弹道诸元真值之间的误差，属于原理误差，它是由于假设及简化而产生的。

要对弹丸质心运动微分方程组求解，还需要知道弹丸的空气动力参数；要计算弹丸在空中运动时的摆动（章动）及进动规律，也需要知道有关的空气动力参数，空气动力参数的求得，可用风洞试验法和射击试验法，这将在下面章节中讨论。

§2 风洞吹风试验求弹丸的空气动力参数

要计算弹道诸元，就需要知道弹丸的空气动力参数，这些气动参数包括：阻力系数$C_x(M,\delta)$、升力系数$C_y(M,\delta)$、翻转（或稳定）力矩系数$C_m(M,\delta)$和二心距h等。

风洞实验法求空气动力参数，可以在风洞中得到固定的马赫数$M=V/a$和攻角δ，因此风洞法测得的气动参数具有静态性质。

一、模型设计

将欲吹风试验的弹丸制成模型，模型应与实际弹丸的外形几何相似，即按弹丸的外形尺寸成比例地放大（或缩小）。模型最大横截面积与风洞横截面积的比值（称为堵塞度）不得大于1～1.2%。

模型在风洞中与测力天平的连接，在跨音速风洞中，目前普遍采用所谓杆式气动力天平。它的结构原理如图7-1所示。

这种天平的测力，是采用应变仪原理，将应变片成对地贴在天平杆上。模型受气动力后，能把六个分力（即三个力X、Y、Z和三个力矩m_x、m_y、m_z）对天平杆的变形作用转化

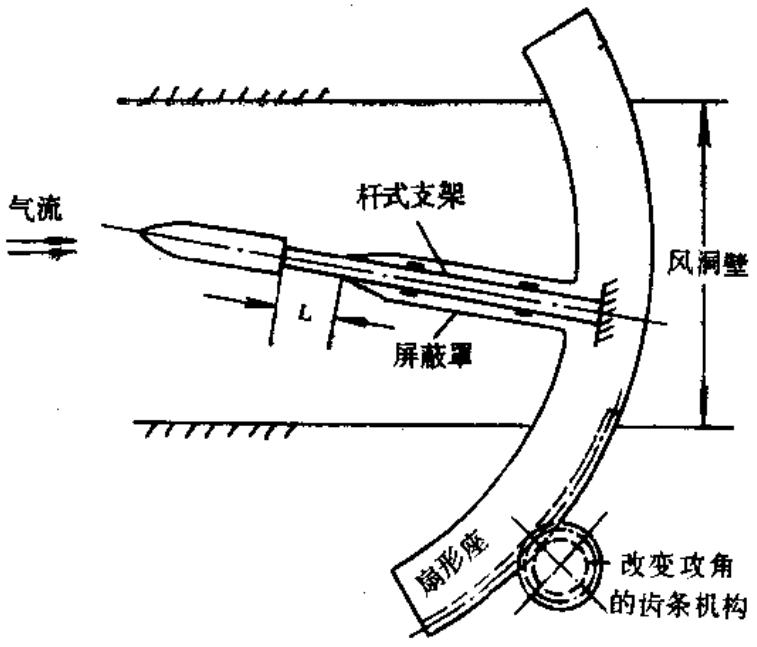


图 7-1 杆式气动力天平结构原理图

为应变仪变化的电信号，然后将这些变化的电信号经应变仪检测后进入电子计算机中计算，很快地计算并打印出模型所受的六个分力。故也称为杆式六分力天平。

杆式天平与模型的连接是依靠一个充分磨配的锥形杆尾，如图 7-2 所示。锥形杆尾的中心位置应当约于原弹丸质心附近。模型底端面与天平杆支架屏蔽罩之间必须有$L>100$毫米的距离(见图7—1)，以保证屏蔽罩对模型底部压强没有干扰影响。模型内尾孔与天平杆之间，应留有 $\Delta>3$ 毫米的环形间隙(见图 7-2)，防止天平杆受力变形后与模型尾部相接触而影响测量结果。

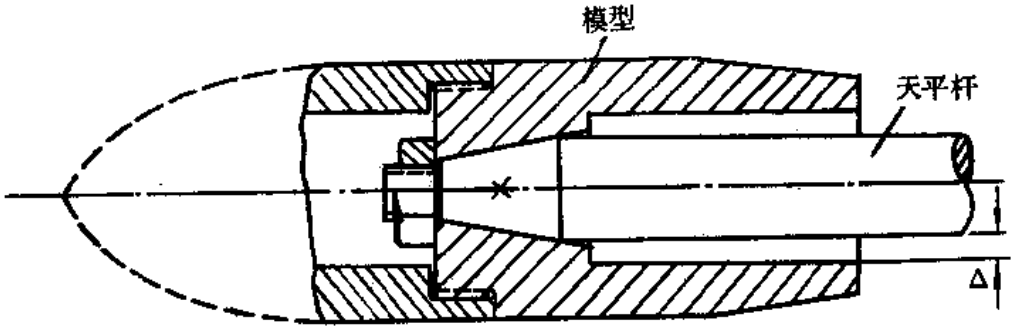


图 7-2 模型与天平杆的连接图

设计模型时，应根据所选用风洞天平测力杆的几何尺寸，做到与天平杆相协调。

模型在吹风试验时，天平杆对模型底部的气流有影响，在超音速气流时，天平杆对底部压强的影响较大，因而对阻力系数有影响，但对模型的升力系数及力矩系数的影响不大。如图 7-3 所示，气流流经弹尾时会产生涡流而使底部压强改变，因而产生不同的底部阻力。有天平杆存在时，改变了底部气流状态，因而底部压强发生变化；另外，天平杆填补了一部份底部面积，因而使底部阻力发生变化。对于有喷气发动机的弹底，发动机喷流恰如天平杆一样，填补了底部喷口面积，因此所测得的底阻误差不会太大，而对于无动力的弹丸或火箭弹在被动段的飞行，就必须考虑天平杆对底阻影响的修正问题。

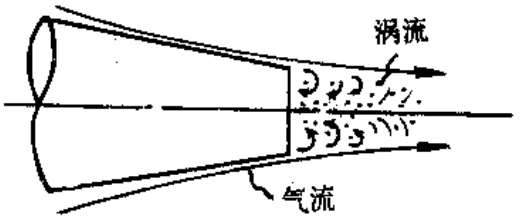


图 7-3 弹底部产生涡流示意图

目前修正底阻系数尚没有成熟的方法，最好是在模型的侧方另外装配一个支架，如图 7-4 所示。专门用来测量模型的底部压强，以便对有天平杆的实验情况作出底阻修正。

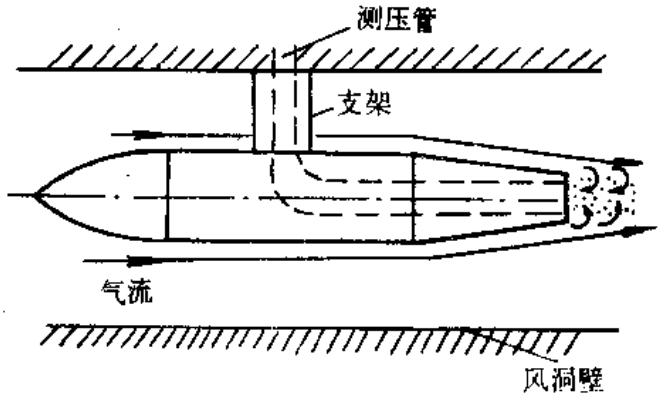


图 7-4 专门测量底部压强的装置

二、吹风试验与数据的取得

弹丸都是轴对称体，因此在风洞中测得的气动参数，主要有阻力系数 C_x，升力系数 C_y 和力矩系数 C_m。

$$\left.\begin{aligned} &\text{阻力}\quad X=\frac{1}{2}\rho V^2 S C_x(M,\delta),\\ &\text{升力}\quad Y=\frac{1}{2}\rho V^2 S C_y(M,\delta),\\ &\text{力矩}\quad m_z=\frac{1}{2}\rho V^2 S l C_m(M,\delta)。\end{aligned}\right\} \tag{7-1}$$

令 $\frac{1}{2}\rho V^2=Q$，称为速度头（或动压），由 (7-1)式得，

$$\left.\begin{aligned} C_x&=\frac{X}{QS},\\ C_y&=\frac{Y}{QS},\\ C_m&=\frac{m_z}{QSl}。\end{aligned}\right\} \tag{7-2}$$

式中：S 为弹丸特征面积，定义最大横截面积 $\frac{\pi d^2}{4}$ 为特征积面；l 为弹丸长度。

在天平上测得 X，Y，m_z 值后，即可由上式算得 C_x，C_y 和 C_m 值。其中 C_x 值由三部分组成。等于前体阻力系数 C_{x0} 加底阻系数 C_{xd} 加底阻系数的修正量 $\triangle C_{xd}$。

上述三个气动参数都是马赫数 M 和攻角 δ 的函数。在试验时，亚、跨音速范围内取一个固定的攻角 δ 值，连续不断地改变气流速度（即改变 M 数），可测得一组 C_x-M、C_y^{α}-M，C_m-M 数据，如图 7-5 所示。一般都是给出一个 δ 值，得到一组 C_x—M 等的数据，是不连续的表格函数，再作图描绘成连续曲线。

在超音速段，要获得超音速气流，需要在模型前面安装超音速喷管，不同的喷管可获得不同 M 数的气流，所以在某一个喷管得到某一个 M 数情况下，改变不同的攻角，可得到一组，C_x-δ，C_y-δ，C_m-δ 数据，如图 7-6 所示。

条件许可时，每个数据可测量 3～5 次，得到一组数据，然后取其平均值，作为该型弹丸的气动力参数值。

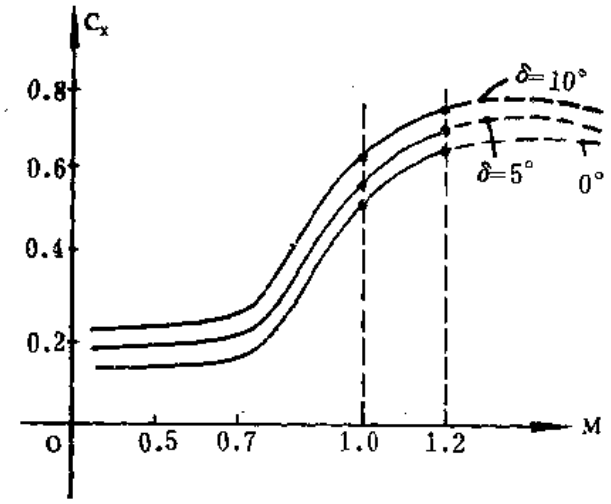
三、数据的整理

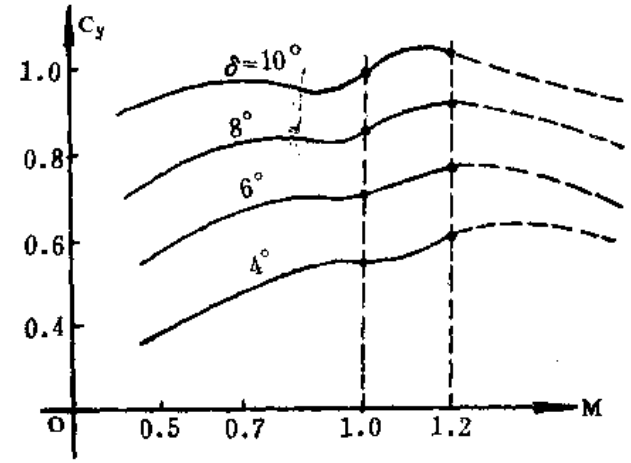
1. 根据图 7-5 及图 7-6 的曲线可用图解法或数学的方法，求得升力系数 $C_y(M)$ 对 M 数的导数 $C_y'(M)$ 及力矩系数的导数 $C_m'(M)$。

2. 由 $C_x(M)=C_{x0}(M)(1+k\delta^2)$ 公式，由 $C_x(M,\delta)$ 曲线或数据表可求得 k 值：

$$k=\left(\frac{C_x(M)}{C_{x0}(M)}-1\right)\frac{1}{\delta^2}。 \tag{7-3}$$

式中：$C_x(M)$ 为在某一攻角 δ 时的阻力系数；





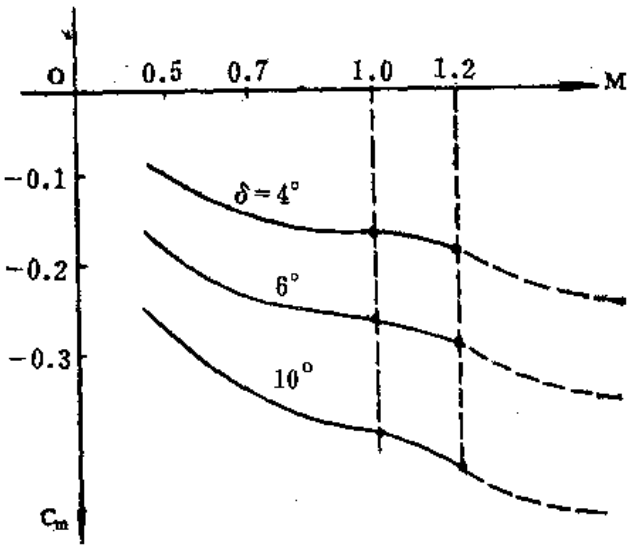
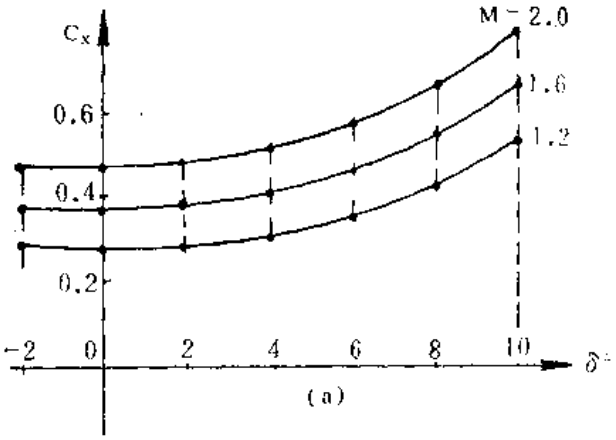
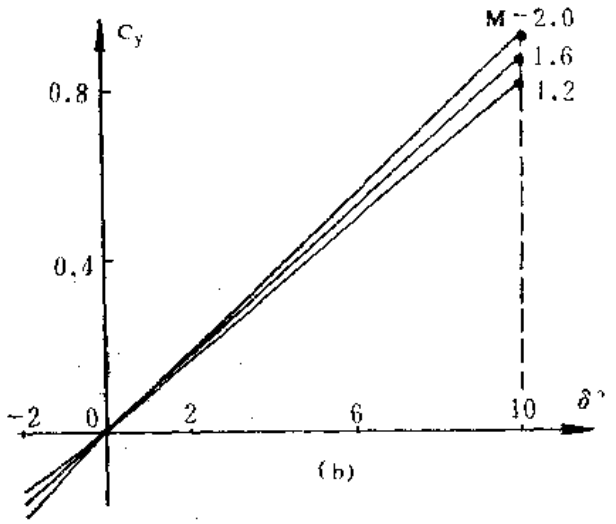


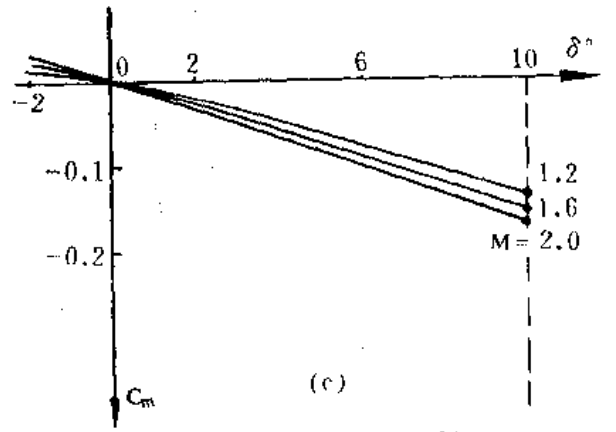
图 7-5 C_x、C_y 及 C_m 与 M 数的关系图



(a)



(b)



(c)

图 7-6 C_x、C_y 及 C_m 与 δ 的函数关系图
(a) C_x—δ图 (b) C_y—δ图 (c) C_m—δ图

$C_{x0}(M)$ 为在 $\delta=0$ 时，在与$C_x(M)$ 相同M数时的阻力系数。

3. 由图 7-7 的关系知。

$$m_z = X \cdot h\sin\delta + Y \cdot h\cos\delta \ 。 \tag{7-4}$$

而

$$\text{阻力}\quad X=\frac{1}{2}\rho V^2SC_x=QSC_x\ 。$$

$$\text{升力}\quad Y=\frac{1}{2}\rho V^2SC_y=QSC_y\ 。$$

$$\text{力矩}\quad m_z=\frac{1}{2}\rho V^2SlC_m=QSlC_m\ 。$$

将上述关系代入（7-4）式，得二心距

$$h=\frac{l\cdot C_m}{C_x\sin\delta+C_y\cos\delta}。\tag{7-5}$$

h也是M及δ的函数，在求得$C_x(M,\delta)$，$C_y(M,\delta)$及$C_m(M,\delta)$之后，可由上式求得二心距$h(M,\delta)$。

对于尾翼弹丸，压心E在质心m的后方，h取负值；而对旋转弹丸，压心E在质心m的前方，h值正值。

风洞试验所取的M及δ值，由于试验时天平杆的变形以及在一定的风门开启度下受外界气温气压的影响，其数值不会正好在所需要的位置上，可以用图解法修正或数学方法修正，得到所需的M,δ位置。

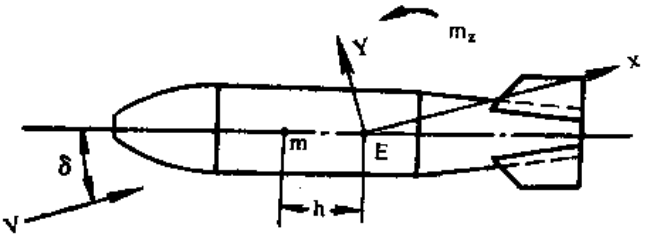


图 7-7　力矩与阻力 X 及升力 Y 的关系图

最后得到的气动力参数值，还要参考射击试验所得结果，再统一考虑，以确定弹丸的空气动力参数。这是因为到跨音速以后，模型上产生波激，激波经风洞壁反射后落到模型上，对模型的气动参数有一定的影响之故。

§3 射击试验

射击试验，可以测量弹丸的炮口初速V_0、阻力系数$C_x(M,\delta)$、升力系数$C_y(M,\delta)$、翻转（稳定）力矩系数$C_m(M,\delta)$、赤道阻尼力矩系数$C_D(M,\delta)$并可计算得二心距h。

用射击试验所测得的空气动力系数具有动态性质，故也称为自由飞行试验，它可以避免风洞试验中风洞壁的干扰，并按弹丸自身的固有特性作章动和进动。所测得的空气动力参数可与风洞实验所得气动参数相验证或取长补短，最后由风洞试验和射击试验所得的结果，并参考其它类似弹丸的气动参数共同确定弹丸的空气动力参数。

为了节省弹药，可以把多项试验项目合并在一次试验中进行。

一、试验前的准备

1. 场地　选用地下的或地面的靶场，地下靶场由于靶道较短，只能作某些短距离项目试验，一般口径较小时，可选用较短的靶道。口径大，靶道应适当地长。

靶场应远离居民点建筑物，避免发生意外危险。最好选用向正南（或正北）方向的靶道，这样可以尽量减少哥氏加速度的影响，因为哥氏加速度$\overline{W}_k=2\overline{\Omega}\times\overline{V}$，$\overline{\Omega}$是地球自转角速度，其方向指向正北方，若$\overline{V}$也指向正北（正南）方，则$(\widehat{\overline{\Omega}\overline{V}})$夹角最小，该夹角就是试

验地点所在地的纬度角。此时的 W_k 最小。

2. 仪器及设备 根据试验项目及条件选用。

仪器：测量弹丸飞行速度时，有电子测时仪，雷达测速仪；测量弹丸章动及进动时，有立靶，同步闪光高速照象机；其它辅助仪器与测量风速风向、气温、气压的气象仪器等。

设备：火炮，应选用其寿命在规定寿命发数的25%～50%以内的正常使用枪炮，在这种寿命范围内的枪炮，其膛线磨损程度适中而又有一定的“跑合度”，保证有较好的试验效果。

火炮的固定装置，应牢固地固定于地基上，火炮的前后固定座，应使炮膛轴线能上、下、左、右调整，并保证射击时不会产生较大的变形，

弹药存放保管库（或保管箱），用以存放小批量的试验用的弹药。

3. 弹药 中小口径枪炮弹的实弹射击试验，所用的弹药就是该型枪炮的真实弹药，要精确实验时，需将弹药逐发作参数测量并做好记录，主要有发射药重量 ω、弹壳内药室容积 W、弹丸重量 q 及直径 d 等。不太精确试验时，可认为整体装配好的枪炮弹药，上述参量都是标准值。

对于大口径弹丸以及按比例缩小的模拟弹丸，例如炸弹模型的炮射试验，除了把弹丸的外形，按几何相似原理把它的几何尺寸按比例缩小以外，模拟弹丸与真实弹丸还要做到物理相似。也就是说，在设计制造模拟弹丸时，模拟弹丸的质心位置、赤道转动惯量 A（旋转弹丸的极惯量 B），都要做到与真实弹丸物理相似。在试验前，对各发模型的弹重 q，转动惯量 A、B 及质心 m 的位置都要测量记录，以备修正。

二、弹丸的炮口初速度 V_0 及其中间偏差的测定

要测定弹丸的炮口初速度，有二种方法：

1. 利用测时仪，测量弹丸穿过二个相距定长的区截装置间的时间 $\triangle t$，再由下式算出其间的平均速度，作为二个区截装置中点 x 的速度 V_x，其原理如图7-8所示。

$$V_x = \frac{\triangle x}{\triangle t},$$

式中：$\triangle x$ 为两区截装置间的距离；

$\triangle t$ 为经过 $\triangle x$ 距离时，弹丸的飞行时间。

区截装置可用铜线靶、铝箔靶、线圈靶、光电靶和所谓天幕靶（光电靶的一种），测时仪目前一般采用电子测时仪。

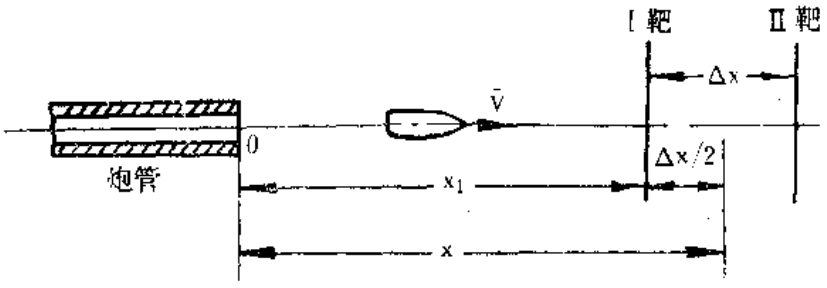


图 7-8 测量弹丸炮口初速 V_0 的示意图

1）电子测时仪是一种以固定频率的电振荡脉冲为时间单元的计时装置，其原理方块图

如图 7-9 所示。

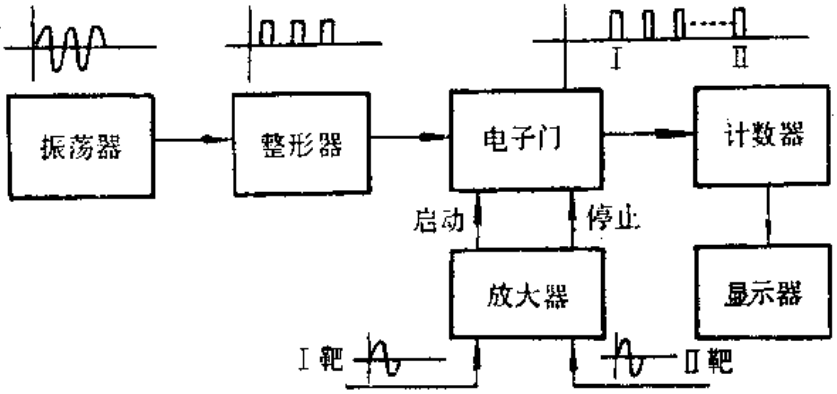


图 7-9 电子测时仪原理方块图

电子测时仪，内装有一个石英晶体振荡器，产生一个稳定频率的高频信号，频率一般为1兆赫，即每秒振荡一百万次（10^6次），经过整形后每秒钟输出 10^6 个方波。显然一个方波占1微秒（10^{-6}秒）的时间。方波经过电子门送往计数器。而电子门的开启和关闭则受靶信号的控制。当弹丸飞过第一靶瞬间，第一靶立即产生靶信号，打开电子门而开始计数。当弹丸飞过第二靶瞬间，第二靶立即产生靶信号，关闭电子门而停止计数。在弹丸通过 $\triangle x$ 的距离内，共用了 $\triangle t$ 时间（即为电子门开和闭的时间）。在此时间内，通过电子门进入计数器的方波数，便由计数器记录，并送入显示器显示出来，它就是弹丸飞经二个靶的时间。

$$\triangle t = \frac{n}{f} = nT \text{ 。}$$

式中：n 为所记录的方波数目；T 为振荡脉冲的周期，（即每个方波所对应的时间）；f 为振荡器的固定频率。

2）当弹丸飞出炮口后，炮管内的火药气体压强仍然对弹丸底部产生推动作用，约经过一段短时间后，炮管内喷出的火药气体的压强才完全消失于大气中，这段时间，就称为后效时期。因此弹丸的最大速度发生在后效时期末了。在试验时，第一个区截装置必须设置在后效时期以后的地方，即 x_1 应有足够的长度。根据弹丸的不同口径。取 x_1 的大小各不相同，如下表所示。

口　　径	7.62mm	12.7	20	23	30	37
炮口距 x_1	≥2～4 米	≥5～8	≥10～14	≥12～16	≥14～20	≥15
两靶距 $\triangle x$	1～2 米	5～10	8～16	8～16	8～16	10～20

航空武器在对敌攻击时，初射角 $|\theta_0|$ 一般都不大，只有在对地攻击时可能有较大的负角度，因此一般试验项目，都取初射角 $\theta_0 = 0°$ 时进行；另一方面，在 $\theta_0 = 0°$ 时，还可略去重力的影响，使试验计算更加简单易行。

3）测试得到 x 点的速度 V_x 后，还需换算为炮口点的速度 V_0。由（4—4）式知

$$D(V_0) = D(V_x) - CHx, \qquad (7\text{-}6)$$

式中：$D(V_0), D(V_x)$ 为西亚切主函数，$D(V) = \int_V^{2000} \frac{dV}{G(V)}$，可由 $G(V)$ 函数用数

值积分后列表备查；

C为弹道系数；H为空气比重函数，$H=\frac{h}{h_{0N}}\cdot\frac{\tau_{0N}}{\tau}$；$h$、$\tau$分别为试验地点的压强及虚温；$\tau$可由测得相对湿度$B$后，查出水蒸气分压强$e$值，由公式$\tau=\frac{T}{1-\frac{3}{8}\frac{e}{h_{0N}}}$算得（近似计算时，也可用$\tau=T=t+273$代替）。

也可以用下述公式近似计算求得V_0：

$$\left.\begin{aligned} V_0&=V_x+\Delta V,\\ \Delta V&=\frac{10\cdot Cx}{\delta D(\bar{V})}\cdot\frac{h\tau_{0N}}{h_{0N}\cdot\tau}\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}7)$$

式中：$\bar{V}$为平均速度，$\bar{V}=\frac{V_0+V_x}{2}$。在第一次计算时，可用$V_x$代替，即$\bar{V}\approx V_x$，求出$\Delta V_1$值后作第二次计算，用$\bar{V}=V_x+\frac{\Delta V_1}{2}$重新计算，即得到准确的$\Delta V$值。

而$\delta D(\bar{V})$为在速度变化10米/秒时，西亚切主函数$D(\bar{V})$的增量，其值事先计算后列表备查，见附表（8）

4）考虑到试验条件不是标准状态时，要作下列的修正：

当发射药药温不等于15°C时，要作药温修正；

$$\Delta V_t=0.0011(t-15)\cdot V_0。\qquad(7\ 8)$$

当弹丸重量不标准时，要作弹丸重量修正；

$$\Delta V_q=-0.4\frac{\Delta q}{q_N}\cdot V_0。\qquad(7\text{-}9)$$

式中：$\Delta q=q-q_N$，（下标N表示标准值）

当弹壳内的药室容积W不标准时，要作药室容积修正；

$$\Delta V_W=-\frac{1}{3}\frac{\Delta W}{W_N}\cdot V_0。\qquad(7\text{-}10)$$

式中：$\Delta W=W-W_N$。

当发射药重量ω不标准时，要作发射药重量修正；

$$\Delta V_\omega=\frac{3}{4}\frac{\Delta\omega}{\omega_N}V_0。\qquad(7\text{-}11)$$

式中：$\Delta\omega=\omega-\omega_N$。

按上述公式及修正式计算每一发的初速度V_0，

5）数据整理及求中间偏差

测量弹丸初速度V_0，需分组统计计算，每组5～10发，口径小的弹丸取大数，口径大的取小数）。求出每一组的平均初速，以及每一发的初速中间偏差。

$$\bar{V}_0=\sum_{i=1}^{n}V_{0i}/n。\qquad(7\text{-}12)$$

$$E_{V_0}=0.6745\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(V_{0i}-\bar{V}_0)^2}{n-1}} \tag{7-13}$$

中间偏差 E_{V_0} 是由于测时仪测量的偏差、火药性能和重量、弹重、温度等销微变化等偶然因素所造成的。也还有靶距测量不准确和测时仪调整得不恰当等原因造成的系统误差。在同一组射击中，各发的系统误差（用 e 表示）不变，故对一组 n 发射击所测平均初速的中间误差为

$$E_{V_n}=\sqrt{\frac{E_{V_0}^2}{n}+e^2}。 \tag{7-14}$$

增加同一组的射击发数 n，只能减小偶然误差 E_{V_0}，但不能减小系统误差 e。当 $n\to\infty$，由（7—14）式可看出 $E_{V_n}\to e$。因此，若要进一步减小平均初速的中间偏差 E_{V_n}，就要增加试验组数 N。因为每做另一组试验之前，仪器要重新调整，距离要重新测量，这样每组内的系统误差就变成整体内的偶然误差了。

N 组试验时的平均初速及中间偏差为：

$$\bar{V}_0=\sum_{i=1}^{N}\bar{V}_{0i}/N。 \tag{7-15}$$

$$E_{V_{nN}}=\sqrt{\frac{E_{V_0}^2}{nN}+\frac{e^2}{N}}。 \tag{7-16}$$

【例】：设系统误差 $e=0.2\%V_0$，偶然误差 $E_{V_0}=0.3\%V_0$，用 15 发弹丸作一组试验，得其平均速度的中间偏差为：

$$E_{V_n}=\sqrt{\frac{0.3^2}{15}+0.2^2}\quad V_0\%=0.215V_0\%。$$

如果将 15 发分成三组，即 $n=5$，$N=3$，则得平均速度的中间偏差为

$$E_{V_{nN}}=\sqrt{\frac{0.3^2}{3\times5}+\frac{0.2^2}{3}}\quad V_0\%=0.14V_0\%$$

这说明了单纯增加一组的试验发数，来减小平均速度的中间偏差，不如将总发数分成数组的效果更好，测初速是这样，测其它参数的试验也是这样。

2. 利用多普勒雷达测速仪，由发射波和运动物体的反射波间的频率差测定弹丸的速度，其原理图，如图 7-10 所示。

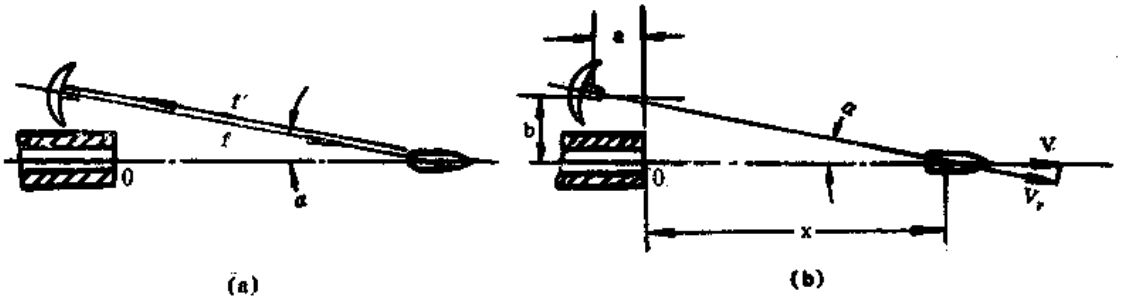


图 7-10　用多普勒雷达测速仪测弹丸速度示意图

$$V_r = \frac{\triangle f}{f} v_。 \qquad (7\text{-}17)$$

式中：v 为电磁波传播速度；f 为发射波频率；

$\triangle f$ 为频率差，$\triangle f = f - f'$。f' 为弹丸飞离炮口 t 时刻时的反射波频率；

V_r 为雷达测速仪与弹丸联线方向上的弹丸速度分量，在水平射击时（$\theta_。 = 0°$），由图 7-10 的几何关系，可算得 $V_。$ 与 V_r 的关系如下式：

$$V_。 = V_r \sec\alpha \approx V_r\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) \qquad (7\text{-}18)$$

式中：$\alpha = tg^{-1}\frac{b}{x+a}$，

x 为弹丸飞离炮口的距离；

t 为弹丸飞离炮口的时间；

a 为沿炮管方向自雷达至炮口的距离；

b 为雷达与炮管轴线间的距离。

测得上述诸参量后，即可得 $V_。$ 值。再按 1 的方法步骤求出 $V_。$ 及其中间偏差。

三、弹道系数和射击密集度的测定

弹道系数沿全弹道是变化的。首先因为弹道系数与弹形系数 $i = \frac{C_{x0}(M)}{C_{\bar{x}0}(M)}$ 有关，而 i 与马赫数 $M = \frac{V}{a}$ 有关。弹丸飞行时，速度 V 是沿全弹道变化的，故 i，C 都在变化。特别是当弹形与标准弹形相差较大时，i，C 的变化就更大。因此，在第一篇中，是以在弹丸飞行速度所处范围内，取平均弹形系数 i 和平均弹道系数 C 代表全弹道上的 i、C 数值的。

射角不同，弹丸速度沿全弹道的变化也不同，因此弹道系数 C 与射角也有关系。但是空中射击时，一般射角不太大（只有对地攻击时，可能有较大的负射角）。所以航空弹丸的弹道系数，可近似认为与射角关系不大，可以在射角 $\theta_。 = 0°$ 时测量弹丸的弹道系数，而代替小正射角和小负射角时的弹道系数值。

其次，弹丸飞行时，由于存在攻角 δ，因此阻力系数随 δ 而变化；

$$C_{x\delta} = C_{x0}(1 + k\delta^2)。$$

因而弹形系数 i 和弹道系数 C 也随 δ 而变化；　$C_\delta = C_0(1 + k\delta^2)$　(7-19)

弹丸运动时的初始条件 $\delta_。$ 及 $\dot{\delta}_。$ 的存在而引起弹丸的摆动（或章动），因此在弹道的起始段上，弹道系数必然随 δ 而变化，如图所示。

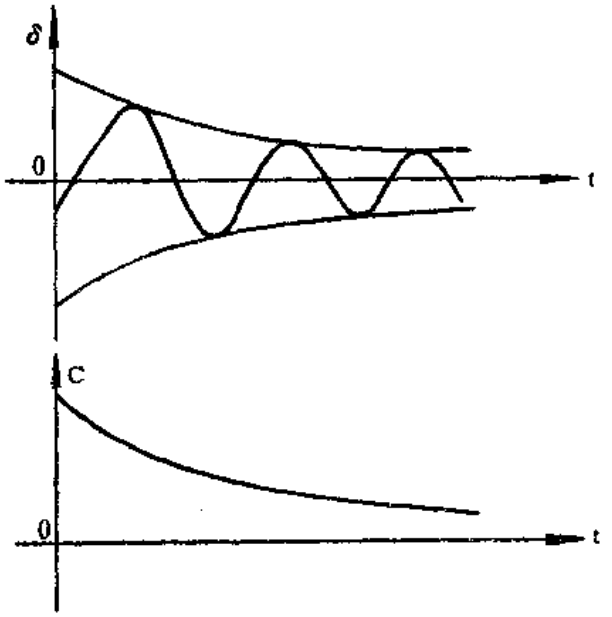


图1-17　攻角 δ 及弹道系数C随时间 t 的变化图

在弹道的曲线段，由于重力作用使弹

道下弯，因而出现了动力平衡角 δ_p，因此弹道系数也会按 (7—19) 式的规律变化（由前所述，知动力平衡角在弹道顶点时有最大值，故对 θ_0 较小或具有 $-\theta_0$ 的航空弹道来说，动力平衡角对弹道系数的影响幅度较小）。

因此我们可采用求平均弹道系数的方法，求出在弹丸飞行速度范围内，几种情况下的弹道系数，再取其平均值代替全弹道上的变化的弹道系数。

1. 用动能法求取初始射角 $\theta=0°$ 附近时的弹道系数。

如图 7-12 所示，用两台测时仪测出弹道上距离为 L 的两点的弹丸速度 V_1 及 V_2，（测量速度的方法，可参考测量弹丸初速度一节）。

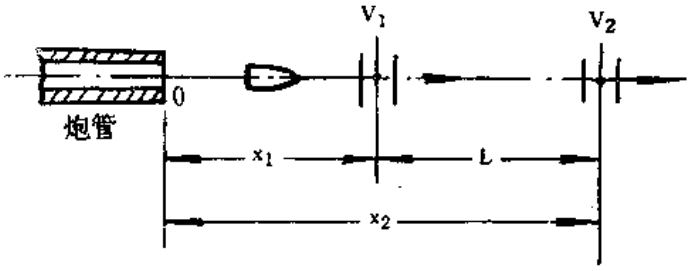


图 7-12 用两台测时仪分别测弹道上两点的速度示意图

在弹丸水平飞行时，弹丸动能的减少等于弹丸克服阻力所做的功，因此有。

$$\frac{q}{2g}(V_1^2-V_2^2)=\int_{x_1}^{x_2}\bar{R}\,dx=\int_0^L \bar{R}dx=\bar{R}\cdot L\text{。}$$

式中：$\bar{R}$ 为平均空气动力，$\bar{R}=\frac{\rho\bar{V}^2}{2}SC_x\left(\frac{\bar{V}}{a}\right)$；

ρ 为空气密度，$\rho=\frac{13.6h}{R\tau g}$；

h 为大气压强，（毫米汞柱）；

τ 为虚温，近似可用 $(t+273)$ 代替；

R 为气体常数；$R=29.27$ 米/度K；

a 为音速，$a=\sqrt{KgR\tau}\doteq 20.08\sqrt{\tau}$；

$S=\frac{\pi}{4}d^2$；$\bar{V}=\frac{V_1+V_2}{2}$。

代入上式并整理之，得到阻力系数公式。

$$C_x\left(\frac{\bar{V}}{a}\right)=\frac{4q}{LS}\cdot\frac{R\tau}{13.6h}\cdot\frac{(V_1-V_2)}{(V_1+V_2)}\text{。}\qquad(7\text{-}20)$$

改变发射药量或改变测速靶的位置 x_1 及 x_2（L不变），可测出 C_x—M 曲线。

而弹形系数 $i=C_{x0}(M)/C_{\bar{x}0}(M)$；

弹道系数 $C=\frac{id^2}{q}\times 10^3$。

可按不同M数算出 i 后取其平均值。

为了减小测量 (V_1-V_2) 值的相对误差，两靶距 L 必须有足够长度。但也不能取得太长，太长则会使弹丸的平均速度 $\bar{V}$ 及平均阻力 $\bar{R}$ 的误差增大，并由于弹道下降过多，重力

的影响较大。因此L的取值为：对于中等口径弹丸，L取200～300米；对枪弹，L取200～100米。口径越小，L也可取得越少。

2. 用速差法求弹道系数

弹丸在空气中飞行时，受重力及空气阻力的作用，其质心运动方程式为：

$$\frac{dV}{dt}=-\frac{\pi}{8}\frac{d^2}{q}\rho g V^2 C_x(M)-g\sin\theta$$

在飞行时间间隔不大时，可用$\frac{\triangle V}{\triangle t}$代替$\frac{dV}{dt}$，由此可得：

$$C_x(\bar{M})=\frac{8}{\pi}\frac{q}{d_2}\frac{1}{\rho g}\frac{1}{\bar{V}^2}\left[\left|\frac{\triangle V}{\triangle t}\right|-g\sin\theta\right]。\tag{7-20}$$

若射角θ变化不大时，（在θ_0较小的直线段内），可略去$g\sin\theta$。式中$\bar{M}=\frac{\bar{V}}{a}$。

只要用雷达测速仪测出相邻等时间间隔的多点速度，用气象仪器测出气压h、温度t、相对湿度B，即可求出$\frac{\triangle V}{\triangle t}$、$\rho$，从而可求出$C_x(M)$曲线。而能求出$i$，$C$的平均值。

如果弹道较长，θ与θ_0相差较大时，可用下式估算θ的修正值。

$$\theta=\theta_0-\frac{g\cos\bar{\theta}}{\bar{V}}\triangle t。$$

$\bar{\theta}=\frac{\theta_0+\theta}{2}$，可迭代计算求得$\theta$后代入(7-20)式中，算得$C_x(M)$值。

如试验时有风，还应考虑对风的修正。

3. 射击密集度的测定

弹着点坐标的测量，如图7-13所示。若为对地面目标攻击时，实际空投（射击试验），可用距离散布和方向散布来表示，如图7-13(a)。用简单测量工具（例如皮尺）测出每组弹各发弹着点坐标后，即可求得。

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}x_i/n\text{——距离平均值，}\\
&\bar{Z}=\sum_{i=1}^{n}z_i/n\text{——方向平均值，}\\
&E_X=0.6745\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}-x_i)^2}{n-1}}\text{距离中间偏差，}\\
&E_Z=0.6745\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{Z}-z_i)^2}{n-1}}\text{方向中间偏差，}\\
&E_Y=E_x\cdot t_g|\theta_c|\text{ 高低中间偏差。}
\end{aligned}\right\}\tag{7-21}$$

式中：$|\theta_c|$为弹着角（落角）值；x_i、z_i为理论的与实际的弹着点的距离；x、y、z是

直角坐标轴系的三根轴。

若对空中目标攻击时，宜用高低角及方位角中间偏差来表示，如图 7—13(*b*) 所示。在靶道上，距发射点若干距离远处，竖放立靶（例如：50 米，100 米、500米、1000 米、1500 米等，按实际需要选定）。每组射击后，在立靶上测量出各发弹着点与理论弹着点的高低及方位差，在初射角$\theta_0<5°$以内，均可得到：

$$\left.\begin{aligned} &Y=\sum_{i=1}^{n} y_i/n \text{ 高低平均值，}\\ &Z=\sum_{i=1}^{n} z_i/n \text{ 方向平均值，}\\ &E_Y=\frac{0.6745}{D}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y-y_i)^2}{n-1}}\text{高低角中间偏差，}\\ &E_Z=\frac{0.6745}{D}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Z-z_i)^2}{n-1}}\text{方位角中间偏差。} \end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}22)$$

式中：D 为立靶与发射点距离；y_i 及 z_i 分别为实际弹着点与理论弹着点间的竖向和侧向偏差。

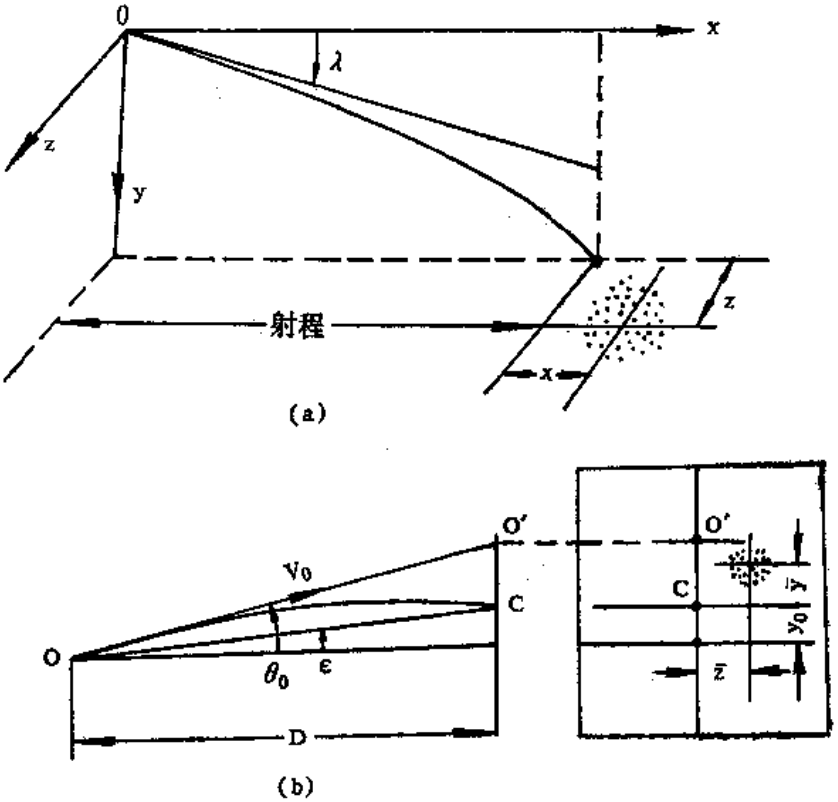


图 7 13 射击密集度的测定示意图

a）弹着点在水平面上的距离散布和方向散布

b）弹着点在铅垂平面内的高低角散布和方位角散布

四、翻转力矩（或尾翼弹的稳定力矩）特征数的测定

弹丸的力矩系数，除了用风洞法测定以外，还可用射击法根据章动周期来测定。

1. 原理：在弹道直线段上沿射击方向等间隔地（在弹丸章动或摆动一个周期内约布置12个左右）配置垂直于射向的纸靶（或在互相垂直的二个平面上配置同步闪光快速照像装置若干套）。当实弹射击后，可获得一系列的穿孔（或弹丸的飞行姿态照片），如图7-14（或图7-15）所示。同时在此区域内，至少要测出两个点以上的速度值。

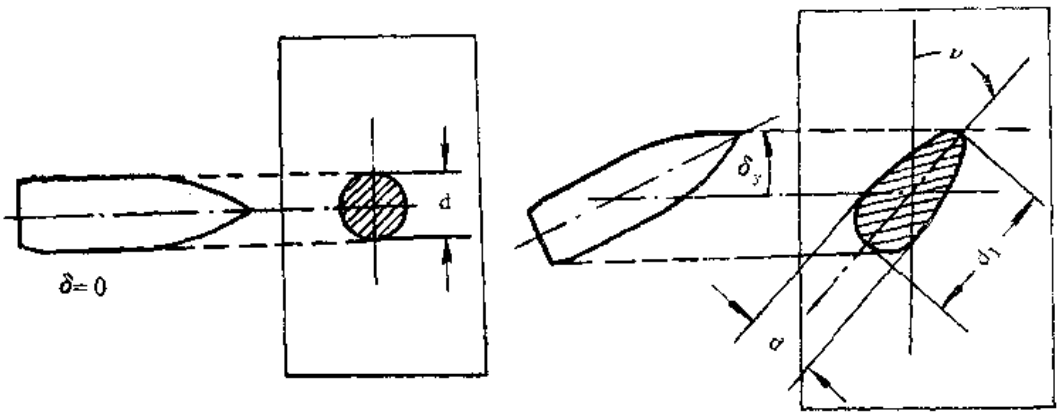


图 7-14 旋转弹丸章动周期的纸靶测定示意图

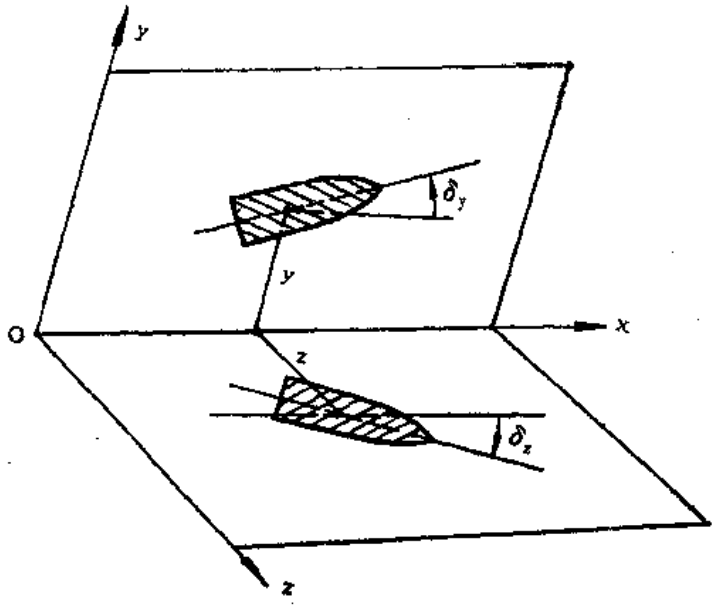


图 7-15 旋转弹丸章动周期的照像测定示意图

在弹道直线段上，速度矢量方向近似与炮管轴线方向相重合，弹丸围绕速度矢量章动及进动运动，章动角 δ 及进动角 ν，都是飞行距离 x（或时间 t）的函数。我们在弹道上设置若干个垂直于速度方向的纸靶（用马粪纸烘烤至发脆），在每个纸靶上标上铅垂直线。射击后，弹丸穿过纸靶时将留下一系列清晰的弹孔，当 $\delta=0°$ 时为圆孔，当 $\delta\neq0°$ 时将近似为蛋形孔，由蛋形孔长短轴 d_1/d 值的大小可以确定出章动角 δ 的大小。

事先，利用实弹或其纵剖面图形做出 d_1/d 曲线，如图7-16所示。由实测弹孔的 d_1/d

值即可在图 7-16 曲线上读出每个纸靶上的 δ 值来。而进动角 ν 即为长轴 d_1 与铅垂直线的夹角（对于不旋转的尾翼弹丸，则没有 ν）。

如果是照像测量，只要测出各套相片中相应的弹丸质心的座标点，(x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3)……和各点照像所获得的弹丸外形的长轴方向，即可测出其诸相应的 δ_y、δ_z 值。由此算出 δ 和 ν，并可作它们和距离 x 的函数曲线。

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2}, \quad \nu = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\delta_z}{\delta_y}$$

如果能同时测出各点的时间 t，就可以作出 $\delta - t$ 和 $\nu - t$ 曲线。由于对纸靶上的弹孔或相片上的姿态照片难于确定 δ 的正负，故通常一律视其为正值。此即相当于在 $\delta = 0$ 点时将阻力面翻转 180°（或 π 弧度）。也就是将 ν 值增或减 180°（或 π 弧度），如图 7—17 所示。由实测的 δ—t 曲线可以确定其起始幅值 δ_{m0} 及章动半周期 $T_\delta\left(T_\delta = \frac{T}{2}\right)$。

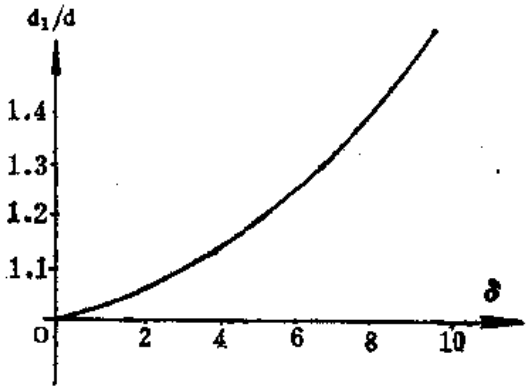


图 7-16 根据纸靶穿孔值 d_1/d 判定攻角 δ 值的曲线图

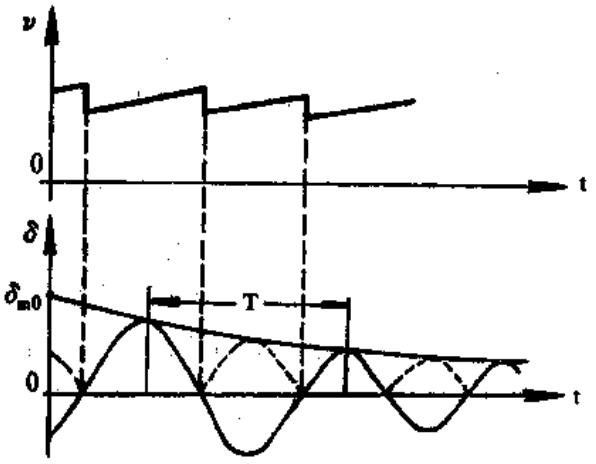


图 7-17 ν—t 及 δ—t 曲线图

为了求出翻转力矩系数，还必须同时在设置纸靶的区域，至少要测出二个点的速度，并绘出速度曲线 $V = V(x)$（当测试距离不大时，可视速度曲线为直线，若测试距离较大时，则应测出三个点以上的速度值，再绘出速度曲线），然后由速度曲线向后延伸至枪（炮）口，直接读出初速度 V_0 值。

由纸靶的位置 x 绘出 $\delta = f(x)$ 曲线，选出相邻的的两个 δ 最大值并确定其所在位置 x_a 及 x_b，由速度曲线找出相应的 V_a 及 V_b 值，如图 7-18 所示。最后即可由下列式子求解。

$$\left.\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{1}{2}(V_a + V_b), \\ T_\delta &= (x_b - x_a)/\bar{V} \quad \text{（或直接由 } \delta\text{—}t \text{ 曲线求得）} \end{aligned}\right\} \tag{7-23}$$

翻转力矩特征数 $K_m(M) = \dfrac{Ag}{d^2 h 10^3 H(y) \bar{V}^2}\left[\alpha^2 - \dfrac{\pi^2}{T_\delta^2}\right]$ (7-24)

上式可由 (5-37)′ 式 $T = \dfrac{2\pi}{\alpha\sqrt{\sigma}}$，将 $T_\delta = \dfrac{T}{2}$，$\alpha = \dfrac{Br_0}{2A} = \dfrac{BV_0\pi}{A\eta d}$、$\sigma = 1 - \dfrac{\beta}{\alpha^2}$、

$\beta = \dfrac{d^3 h}{Ag} 10^3 \cdot H(y) V^2 K_m(M)$ 代入 T 中整理而得。

式中：A 为赤道转动惯量；B 为极转动惯量；r_0 为自转角速度；h 为二心距；d 为弹丸

直径；$H(y)$为试验地点的气重函数；$\bar{V}$为平均速度，可由(7-23)式求出；η为炮管缠度。

2. 方法说明：

由于$K_m(M)$是M数$\left(\frac{V}{a}\right)$的函数，所以还应计算试验时的音速a值。所测得的$K_m\left(\frac{\bar{V}}{a}\right)=K_m(M)$是所在$M$数时的$K_m$值。若改变弹丸飞行速度$\bar{V}$（即改变纸靶的位置），可以测得不同的$K_m\left(\frac{\bar{V}}{a}\right)$值，便可以绘制$K_m$—$M$的关系曲线。

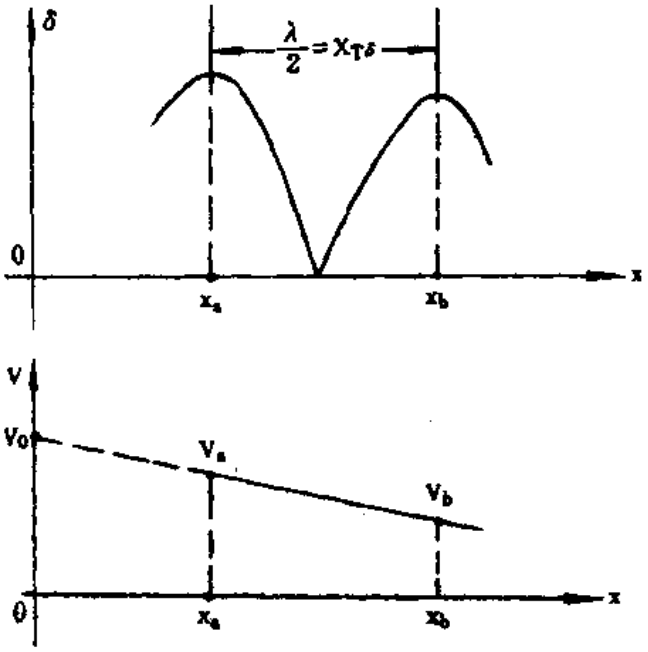


图 7-18 攻角及距离x和速度及距离x的函数关系图

对于已经定型的弹丸来说，其章动角是不大的，甚至有时在纸靶上难于判断出δ的变化。这时，为了能清楚地判断出δ的变化，必须在枪（炮）上安装偏角器，使弹丸在后效期内由于火药气体的不对称而形成较大的章动角。当章动角的最大值不超过10°～12°时，对测量K_m值不会有严重的影响。

纸靶的数量及间隔大小应根据不同的弹丸性能而定。对于枪弹来说，两纸靶的间隔可取0.2～0.5米，保证δ摆动半个周期内能穿过5～6个以上的纸靶，纸靶的数量则应根据章动周期数来确定，但至少应保证有1个周期。

纸靶的材料可用马粪纸，用于大口径弹丸时，可在纸靶上涂虫胶漆。用于小口径弹丸时，可在烘箱内烘烤至200°C并保温3～4小时，也可用坐标纸烘烤至发脆为止。试验时，才能获得光滑的弹孔边缘。

另外由（5—36）式知章动振幅$A=\frac{\dot{\delta}_0}{\alpha\sqrt{\sigma}}$，由图7-17可得$\delta_{m0}$值，而$\delta_{m0}=\frac{\dot{\delta}_0}{\alpha_0\sqrt{\sigma_0}}$，可求得初始条件$\dot{\delta}_0=\delta_{m0}\alpha_0\sqrt{\sigma_0}$。

上式中α_0及σ_0为$\bar{V}=V_0$处的值。

3. 对于不旋转的尾翼弹丸（或大口径炸弹的缩小模型），可由滑膛炮射出，用同样的方法测出章动角δ-x曲线及$\bar{V}$-x曲线。

由(6-88)式，知无动力尾翼弹的摆动周期为

$$T=\frac{2\pi}{k_u\cdot\bar{V}}=\frac{2\pi}{k_u x/t}\ 。\qquad (7\text{-}25)$$

而 $k_u=\sqrt{\rho SlC'_m/2A}$为稳定力矩特征数（参阅6-18）式。

C'_m为稳定力矩系数导数。

在试验前，可由(7-25)式试算摆动波长λ（即摆动一周期时，弹丸运动距离x）。由

$k_u \cdot x = 2\pi$，$\lambda = x$ 得

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_u} = 2\pi\sqrt{\frac{2A}{\rho S l C'_m}}。 \qquad (7\text{-}26)$$

以便在一个 λ 内布置测量仪器或纸靶12个左右。

射击试验后，可以测得 δ—x 曲线，如图7-19所示。

选取弹丸（或模型）摆动的波长 λ，即可由下式求得 C'_m

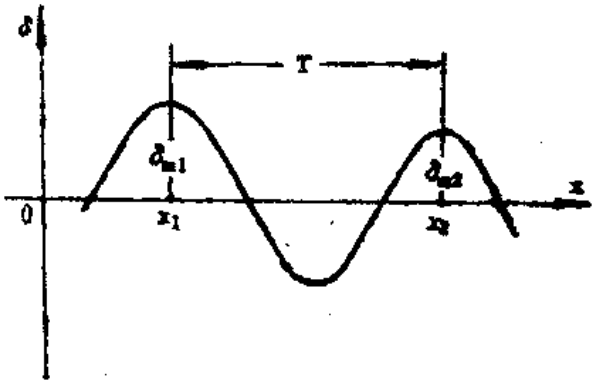


图 7-19　攻角 δ 与距离 x 的函数关系图

$$\left.\begin{aligned} C'_m &= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{2A}{\rho S l} = \frac{32\pi A}{d^2 l \lambda^2 \rho} = \frac{32\pi A}{d^2 l \lambda^2} \cdot \frac{R\tau g}{13.6h}, \\ \text{或 } k_u &= \frac{2\pi}{\lambda}。 \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}27)$$

式中：λ 为摆动波长（由 δ-x 曲线得到）；A 为赤道转动惯量；d 为直径；l 为弹丸长；R 为气体常数；τ 为虚温；h 为压强（毫米汞高）。

因为 C'_m 及 k_u 都是 M 数 $\left(\frac{V}{a}\right)$ 的函数，故所求出的 $C'_m(M)$ 及 $k_u(M)$ 是对应于该周期内的平均速度 $\bar{V}$ 时的 M 数。

同理，当移动纸靶位置或改变发射药量时，可以改变所测摆动周期内的 $\bar{V}$，从而得到 $C'_m(M)$ 或 $k_u(M)$ 曲线。

五、尾翼弹丸赤道阻尼力矩系数导数和升力系数导数的测定及二心距 h 的计算

1．由(6-18)式 $k_D = \rho S l^2 C'_D / 2A$，称 k_D 为赤道阻尼力矩特征数，C'_D 称为阻尼力矩系数导数。

在上述测量尾翼弹稳定力矩系数的同时，由图7-19的 δ-x 曲线中测出第1及第2个章动角 δ 的幅值，根据(6-87)式有：

$$\left.\begin{aligned} \delta_{m1} &= \delta_{m0} \cdot e^{-bx_1}, \\ \delta_{m2} &= \delta_{m0} \cdot e^{-bx_2}。 \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}28)$$

将上两式相除后取对数，并由 $\lambda = x_2 - x_1$ 得。

$$b = \frac{1}{\lambda} \lg \frac{\delta_{m1}}{\delta_{m2}}。 \qquad (7\text{-}29)$$

由(6-83)式知 $b = \frac{1}{2}\left(k_D + b_y - b_x - \frac{g\sin\theta}{V^2}\right)$，

故 $k_D + b_y - b_x - \frac{g\sin\theta}{V^2} = \frac{2}{\lambda} \lg \frac{\delta_{m1}}{\delta_{m2}}$。在水平射击、$\theta$ 较小时，可略去 $g\sin\theta/V^2$ 项。若认为 $k_D \gg b_y - b_x$ 时，

由

$$k_D = \frac{2}{\lambda} \lg \frac{\delta_{m1}}{\delta_{m2}} + b_x - b_y, \qquad (7\text{-}30)$$

可近似得 $$k_D=\frac{2}{\lambda}\lg\frac{\delta_{m1}}{\delta_{m2}}。\qquad(7\text{-}30)'$$

k_D、b_x、b_y 都是 M 数的函数，若用 $k_D=\rho Sl^2C_D'(M)/2A$、$b_x=\rho SC_x(M)/2m$、$b_y=\rho SC_y'(M)/2m$ 代入，则得

$$\left.\begin{aligned}C_D'(M)&=\frac{Ag}{l^2}\left[\frac{16}{\pi d^2\rho g\lambda}\lg\frac{\delta_{m1}}{\delta_{m2}}+\frac{1}{q}(C_x-C_y')\right],\\ \text{近似为}\quad C_D'(M)&=\frac{4A}{\lambda\rho Sl^2}\lg\frac{\delta_{m1}}{\delta_{m2}}。\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}31)$$

式中：A为赤道转动惯量；λ 为摆动波长；S为弹丸横截面积；l 为弹丸长；ρ 为试验地点的空气密度，$\rho=\frac{13.6h}{R\tau g}$；$q$ 为弹丸重量，δ_{m1}、δ_{m2} 为测得的相邻两个摆动(章动)角幅值。

当改变装药量或纸靶位置时（即改变$\bar{V}$，M），从而可测得 $k_D(M)$ 或$C_D'(M)$ 曲线。

2. 在做试验的同时，若测出弹道的平均偏角 $\bar{\varphi}_{\delta_0}$，则可由 (6-90) 式近似求出升力系数导数。

$$C_y'(M)=\frac{l}{R_A^2}\cdot\frac{V_0}{\delta_0}C_m'(M)\bar{\varphi}_{\delta_0}。\qquad(7\text{-}32)$$

式中：δ_0 为起始摆动角速度，δ_0 可由 (6-87)式

$\delta_0=V_0ku\cdot\delta_{m0}$ 求得，而 δ_{m0} 则可由实验值 δ_{m1}，δ_{m2}……等值外推求得。

在求出了$C_y'(M)$ 及 $C_x(M)$ 的情况下，可由 (7-31) 式求得 C_D' 的精确值。

3. 由 (6-8) 式知二心距 h：

$$h(M)=\frac{C_m'(M)\cdot l}{C_y'(M)+C_x(M)}\qquad(7\text{-}33)$$

式中：h 是M数的函数；l 为弹丸长；$C_m'(M)$、$C_y'(M)$、$C_x(M)$ 都可由实验求得。

有风时，还应对风的影响进行修正。

§4 航空外弹道表的编制

一、外弹道表的种类与要求

根据战斗使用以及投射方式的不同，航空外弹道表可分为：射击弹道表（弹道函数表）；轰炸弹道表；辅助函数表三种类型。

射击弹道表是专为查算各种射击型弹丸（包括枪炮弹丸及火箭弹丸）的弹道诸元而编制成的表格；轰炸弹道表是专为查算各种投放型弹丸（包括各种炸弹、鱼雷等弹丸）的弹道诸元而编制成的表格；辅助函数表格是专门为求解弹道诸元所需的各种积分函数或代数函数而编制成的表格。

弹道表是指导航空火控系统设计的重要文件，因为弹道表可以作为计算命中目标诸元时查阅之用。但在航空火控系统中、弹道诸元的获得，却不能用查表的方法，而是用一个具有一定精确度而又简单易解（容易为火控系统计算机所求解），快速的（几乎是实时的）解析式子，把从参数测量器上测得的投射初始参数送入火控计算机，就能自动地实时地用这种解析式子计算出当时能命中目标的弹道诸元来。在科学技术高度发展的航空火控系统中，计算

出来的弹道诸元，并不需要由人工读出和装填入火控系统，而是由火控系统自动读出后自动显示出瞄准符号，空中射击手便直接操纵武器瞄准目标并投射弹丸。这种解析式子，是由火控系统设计人员根据弹道表上诸元的值，经过拟合得到的。所以要求弹道表必须：

1. 满足一定的精度要求

在射击和轰炸武器上，精度一般都用中间偏差E来表示。（中间偏差E的概念可参阅概率论有关知识），

设整个武器系统瞄准射击目标时总的允许中间偏差为E_Σ（下标Σ表示总偏差），则构成整个武器系统各个环节的中间偏差，一般应具有相等的数值，（即具有相等的权），不然的话，过份地提高某一个环节的精度，在实际上也不能提高整个武器系统的精度。故当等权（$E_1=E_2=\cdots\cdots E_n$）时，有

$$E_\Sigma=\sqrt{E_1^2+E_2^2+\cdots+E_n^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}E_i^2}=\sqrt{n}\cdot E_i,$$

$$\therefore\qquad E_i=\frac{E_\Sigma}{\sqrt{n}}。\tag{7-34}$$

式中：E_i为组成整个武器系统的第i个环节的中间偏差；n为组成整个武器系统的环节数。

若组成整个武器系统中的某一个环节（例如第1个环节），它的精度在设计时容易达到要求，或者该环节的精度对整个系统的精度影响较大，则可以提高该环节的精度，即该环节中间偏差权减小，令其中间偏差是其它环节中间偏差的$1/m$倍，（$m>1$）。

设：$E_1=\frac{1}{m}E$，$E_2=E_3\cdots E_n=E$。

则 $E_\Sigma=\sqrt{E_1^2+E_2^2+\cdots+E_n^2}=\sqrt{\frac{1}{m^2}E^2+E_2^2+\cdots+E_n^2}=\frac{E}{m}\sqrt{1+(n-1)m^2}$。

$$\therefore\qquad E=\frac{m\,E_\Sigma}{\sqrt{1+(n-1)m^2}},$$

$$E_1=\frac{1}{m}E=\frac{E_\Sigma}{\sqrt{1+(n-1)m^2}},\tag{7-35}$$

$$E_2=E_3=\cdots E_n=\frac{m\,E_\Sigma}{\sqrt{1+(n-1)m^2}}。\tag{7-36}$$

上式中：n为构成整个武器系统的环节数；$1/m$为第一个环节的中间偏差权数；E_1为第一个环节的中间偏差数值；E_i为其它环节的中间偏差数值；E_Σ为整个武器系统的中间偏差数值。

同理，若组成整个武器系统中的某个环节（例如第一个环节），它的精度在设计时不容易达到要求，或者该环节的精度对整个武器系统的精度影响较小，则可以降低该环节的精度，即该环节中间偏差的权增大。令其中间偏差是其它环节中间偏差的m倍，（$m>1$）。

设：$E_1=m\,E$，$E_2=E_3=\cdots\cdots E_n=E$。

则 $E_x = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + \cdots + E_n^2} = \sqrt{(mE)^2 + (n-1)E^2} = mE\sqrt{1+(n-1)\frac{1}{m^2}}$，

$$\therefore \quad E = \frac{E_x}{m\sqrt{1+(n-1)\frac{1}{m^2}}}。$$

$$E_1 = \frac{E_x}{\sqrt{1+(n-1)\frac{1}{m^2}}}。 \tag{7-37}$$

$$\therefore \quad E_i = \frac{E_x}{m\sqrt{1+(n-1)\frac{1}{m_2}}}。 \tag{7-38}$$

式中：E_1为第一个环节的中间偏差数；E_i为其它环节的中间偏差数；E_x为整个武器系统的中间偏差数；m为第一个环节的偏差权数。

2. 满足一定的完整性

弹道表必须具有一定的完整性，凡是作战时可能使用的飞行高度、飞行速度、投射距离、俯冲（上仰）角度和使用弹丸种类的范围内的弹道诸元，都能够在相应的弹道表中查得。把高度、速度、距离、俯冲角和弹丸特征数等自变量按一定的间隔编表。在常用段内，间隔应密一些，在非常用段内，间隔可稀疏一些，以便于查找并能适当减少篇幅。自变量间隔的选取，以可用线性插值而又不引起过大的误差为宜。

对于轰炸弹道表，由于弹种较多，使用范围又较广，还应编制专为作战人员使用的投弹表，投弹表比弹道表应更简明易查且篇幅也小。同时还应编有专为修正地面气象条件不标准时的修正系数表。

3. 具有使用的方便性和耐用性。并要考虑体积不宜过大，以便于携带，字体大小适当，清晰易认，内容简明，查取迅速，纸质坚韧耐磨，防潮抗污等特点。

二、外弹道表的内容与格式等编制问题

根据空战时火控系统对各类弹丸弹道诸元计算方式的不同，各种弹丸弹道表有其不同的内容。

1. 二头标空中射击弹道表的内容必须具有下列诸元：

飞行速度V；飞达目标的时间T；平均飞行速度V_{pj}；速度比P；弹道降低量η；抬高角α；命中目标时的弹着角ω。

根据第四章（4-16）式

$$\left.\begin{aligned} V &= V_{01}g_v(C_H D, V_{01}), \\ P &= \frac{gD}{V_{01}^2}g_p(C_H D, V_{01}), \\ \eta &= \frac{gD^2}{2V_{01}^2}g_\eta(C_H D, V_{01}), \\ T &= \frac{D}{V_{01}}g_t(C_H D, V_{01}), \end{aligned}\right\} \tag{7-39}$$

$$
\left.\begin{aligned}
a &= \frac{\eta}{D}\cos\varepsilon,\\
\omega &= \frac{gD}{2V_{01}^2}\cos\varepsilon\cdot g_\omega(C_HD,V_{01}),\\
V_{pJ} &= \frac{D}{t} = V_{01} - C_HD\cdot K_{VPJ}(C_HD,V_{01})\ 。
\end{aligned}\right\}
$$

对于二头标的弹道表（或弹道函数表）应有如表7—1的格式。自变量V_{01}及C_HD自V_{011}至V_{01t}、C_HD_1至C_HD_j是常用范围，按一定的间隔由小到大排列。间隔的大小，应以线性插值求其中间某点的值时，不产生不能允许的偏差为宜。

这样，二头标弹道表就是i个V_{01}点和j个C_HD点的组合数的点阵。可以把它分成j组，由于在一张印刷板内的板幅是有限的，故每一组需印刷成若干页纸（例如V_{01}自$V_{01,1}$～$V_{01,10}$，C_HD自$C_{HD,1}$～$C_{HD,20}$作为一页）。

表 7-1

C_HD \ V_{01} 诸元	$V_{01,11}$	$V_{01,2}$	……	$V_{01,10}$	……	……	$V_{01,t}$
$C_HD_{,1}$	……	……	……	……	……	……	……
$C_HD_{,2}$	……	……	……	……	……	……	……
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$C_HD_{,20}$	……	……	……	……	……	……	……
⋮							
⋮							
$C_HD_{,j}$	……	……	……	……	……	……	……

根据(4-17)式及(4-18)′式

$$
\left.\begin{aligned}
Ku(C_HD,V_{01}) &= \left(\frac{1}{g_u}-1\right)\frac{1}{C_HD},\\
K_p(C_HD,V_{01}) &= (g_p-1)\frac{1}{C_HD},\\
K_\eta(C_HD,V_{01}) &= (g_\eta-1)\frac{1}{C_HD},\\
K_t(C_HD,V_{01}) &= (g_t-1)\frac{1}{C_HD},\\
K_\omega(C_HD,V_{01}) &= (g_\omega-1)\frac{1}{C_HD},\\
K_{VPJ}(C_HD,V_{01}) &= \frac{V_{01}}{C_HD}\left(1-\frac{1}{g_t}\right),
\end{aligned}\right\}
\qquad (7\text{-}40)
$$

把二头标弹道函数K及g编制成弹道函数表，其格式与表(7-1)相同。

2. 对于三头标射击弹道表（或弹道函数表），根据(4-75)式及(4-78)式，分为低空段及高空段，它们具有相同的格式。

①低空段($H \leqslant 11$千米)

$$\left.\begin{aligned} V &= V_{01}\cdot F_V(C_HD, V_{01}^*, \phi^*),\\ V_{pJ} &= V_{01}\cdot F_{VpJ}(C_HD,\ V_{01}^*, \phi^*),\\ a &= \frac{gD}{2V_{01}^2}\cos\varepsilon\cdot F_a(C_HD, V_{01}^*, \phi^*),\\ T &= \frac{D}{V_{01}}\cdot F_t(C_HD, V_{01}^*, \phi^*),\\ \varphi &= \left(a - \frac{1}{tg\varepsilon}\right)F_\varphi(C_HD, V_{01}^*, \phi^*)。 \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}41)$$

式中：$V_{01}^* = V_{01}\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_H}}$；$\tau_H$ 为射击所在高度的虚温；τ_{0N} 为地面标准虚温度。

$\phi^* = \frac{\sin\varepsilon}{C^*}$；$C^* = C\frac{h_H}{h_{0N}}$；$h_H$ 为射击所在高度的气压；h_{0N} 为地面标准气压；

ε 为目标高低角；C为弹道系数。

弹道诸元（或诸函数F）表格的形式如表7-2所示。

表 7-2

（1） $\phi^* = \phi_1^*$

V_{01}^* / C_HD	$V_{01,1}^*$					$V_{01,2}^*$……			$V_{01,i}^*$				
	V	V_{pJ}	a	T	φ	…	…	……	V	V_{pJ}	a	T	φ
$C_HD_{,1}$	…	…	…	…	…	⋮	⋮		…	…	…	…	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$C_HD_{,j}$	…	…	…	…	…	…	…		…	…	…	…	…

（2） $\phi^* = \phi_2^*$

V_{01}^* / C_HD	$V_{01,1}^*$					$V_{01,2}^*$……				$V_{01,i}^*$				
	V	V_{pJ}	a	T	φ	…	…	…	…	V	V_{pJ}	a	T	φ
$C_HD_{,1}$	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$C_HD_{,j}$	…	…	…	⋮	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

（k） $\phi^* = \phi_k^*$

V_{01}^* / C_HD	$V_{01,1}^*$					$V_{01,2}^*$……				$V_{01,i}^*$				
	V	V_{pJ}	a	T	φ	…	…	…	…	V	V_{pJ}	a	T	φ
$C_HD_{,1}$	…	…	…	…	…					…	…	…	…	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$C_HD_{,j}$	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

三头标弹道表（或函数表）的编制方法，是先取第3个自变量的第1个数字，再取第1个自变量与第2个自变量的组合，得到第1个 $i\times j$ 数值的点阵，由前面二头标表格可知共有 j 个组的数据。再取第3个自变量的第2个数字，再重复第1个自变量与第2个自变量的组合，得到第2个 j 组数据，……最后取第3个自变量的第 k 个数，再取第1个自变量和第2个自变量的第 k 次组合，得到第 k 个 j 组数据。因此得到 $k\times j$ 组数据的表格，共有 $k\times j\times i$ 个数。

② 高空段（$H>11$千米）

根据(4-78)式

$$\left.\begin{aligned} &V=V_{01}\cdot F_{V高}(C_HD,V_{01}^*,\phi^*),\\ &V_{pJ}=V_{01}F_{VpJ高}(C_HD,V_{01}^*,\phi^*),\\ &\alpha=\frac{gD}{2V_{01}^2}\cos\varepsilon\cdot F_{\alpha高}(C_HD,V_{01}^*,\phi^*),\\ &T=\frac{D}{V_{01}}\cdot F_{t高}(C_HD,\ V_{01}^*,\phi^*)\\ &\varphi=\left(\alpha-\frac{1}{tg\varepsilon}\right)F_{\varphi高}(C_HD,V_{01}^*,\phi^*)。\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}42)$$

式中：$V_{01}^*=V_{01}\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_{11}}}$，$\tau_{11}$ 为11为公里高度处的虚温；

$\phi^*=\frac{\sin\varepsilon}{C^*}$，$C^*=C\frac{h_{11}}{h_{0N}}$，$h_{11}$为11公里高度处的气压。诸弹道函数表（或弹道诸元表）具有同表7-2相同的格式。

3. 三头标轰炸弹道表（即水平轰炸弹道表）

三头标轰炸弹道表，具有诸元为：飞行时间 T；退曳长△；水平射程 $A(=V_1T-\triangle)$；瞄准角 $\varphi\left(=tg^{-1}\frac{A}{H}\right)$；落速 V_c；（$=\sqrt{V_x^2+V_y^2}$）；落角 $\theta_c\left(=tg^{-1}\frac{V_y}{V_x}\right)$，它们都是投弹高度 H、飞机速度 V_1 和炸弹特征时间 Θ（或 C）的函数。

可表为

$$\left.\begin{aligned} &T=T(H,V_1,\Theta),\qquad &&\varphi=\varphi(H,V_1,\Theta),\\ &\triangle=\triangle(H,V,\Theta),\qquad &&V_c=V_c(H,V_1,\Theta),\\ &A=A(H,V_1,\Theta)\ ,\qquad &&\theta_c=\theta_c(H,V_1,\Theta)。\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}43)$$

所编制成的三头标轰炸弹道表，与2中的表7—2具有相同的格式。

4. 四头标的俯冲（或上仰）轰炸弹道表

四头标轰炸弹道表，根据火控瞄准的需要，有下列诸元：飞行时间 T；水平射程 A；超越角（忽略攻角及翼弦角）$\psi\left(=\frac{\pi}{2}-\varphi-\lambda_\alpha\right)$；落速 V_c 及落角 θ_c。可表为

$$\left.\begin{aligned} &T=T(H,V_1,\Theta,\lambda_\alpha),\\ &A=A(H,V_1,\Theta,\lambda_\alpha),\\ &\psi=\psi(H,V_1\Theta,\lambda_\alpha),\\ &V_c=V_c(H,V_1,\Theta,\lambda_\alpha),\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}44)$$

$$\theta_c = \theta_c(H, V_1, \Theta, \lambda_\alpha)。 \tag{7-44}$$

四头标弹道表具有如表 7-3 的格式。

首先取第 4 个自变量λ_α的第 1 个值λ_1，作如表 7—2 的 $k \times j$ 组数编表，得到 $k \times j \times i$ 个数。再取第 4 个自变量的第 2 个数值 λ_2，作如第 1 步那样的编表循环，得到第 2 个 $k \times j$ 组数，……最后，取第 4 个自变量的最后一个值 λ_l，作如第 1 步那样的编表循环，得到第 l 个 $k \times j$ 组数，全表共有 $l \times k \times j$ 组数据，$l \times k \times j \times i$ 个数据。（表中 λ_α 省略下标 α）。

表 7-3 （1） $\lambda = \lambda_1$ $\quad \Theta = \Theta_1$

V_1 / H	$V_{1,1}$					$V_{1,2}$……			$V_{1,4}$				
	A	T	ψ	V_c	θ_c	…	…	……	A	T	ψ	V_c	θ_c
H_1	…	…	…	…	…	…	…	……	…	…	…	…	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	……	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	……	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Hj	…	…	…	…	…	…	…	……	…	销	…	…	…

$\Theta = \Theta_2$
⋮
$\Theta = \Theta_k$

（2） $\lambda = \lambda_2$ $\quad \Theta = \Theta_1$
$\Theta = \Theta_2$
⋮
$\Theta = \Theta_k$

（3） $\lambda = \lambda_3$ $\quad \Theta = \Theta_1$
⋮ ⋮ ⋮ ⋮
（l） $\lambda = \lambda_l$ $\quad \Theta = \Theta_1$
⋮
$\Theta = \Theta_k$

V_1 / H	$V_{1,1}$					$V_{1,2}$……			$V_{1,4}$				
	A	T	ψ	V_c	θ_c	…	…	……	A	T	ψ	V_c	θ_c
H_1	…	…	…	…	…	…	…	⋮	…	…	…	…	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…	……	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
H_j	…	…	…	…	…	…	…	……	…	…	…	…	…

三、外弹道表的使用

当有了初始投射条件时，即可在弹道表上查找得到弹道诸元。若自变量（初始条件）值恰好是表中的标称值时，能直接从表中查得弹道诸元。但是一般的自变量值不一定恰好在自变量的标称值上，这时就需要用线性插值法求弹道诸元。根据自变量数的不同，插值次数也不相等。

线性插值公式为

$$y = y_n + (y_{n+1} - y_n) \cdot \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n}。 \tag{7-45}$$

式中：y 为已知 x 时要求解的函数值；y_n 为 y 前面一点的函数值；y_{n+1} 为 y 后面一点的函数值；x 为已知自变量的值；x_n 为 x 前面一点的自变量值；x_{n+1} 为 x 后面一点的自变量值。

1. 需要一次插值的表解法

现以查 1970 年水平轰炸弹道表为例，若标准落下时间 Θ 不是标称值时；已知某炸弹的 $\Theta = 21.12$ 秒，查表求 $H = 1400$ 米、$V_1 = 750$ 公里/小时的弹道诸元 T、$\triangle$、V_c、θ_c。

方法：①先查出 $\Theta_1 = 21.10$ 秒、$H = 1400$ 米、$V_1 = 750$ 公里/小时的弹道诸元：$T_1 = 18.12$ 秒，$\triangle_1 = 714$ 米，$V_{c1} = 196$ 米/秒，$\theta_{c1} = 47°$。

②再查出 $\Theta_2 = 21.20$ 秒、$V_1 = 750$ 公里/小时、$H = 1400$ 米的弹道诸元：$T_2 = 18.24$ 秒，$\triangle_2 = 781$ 米，$V_{c2} = 191$ 米/秒，$\theta_{c2} = 48°$。

③ 插值求 T

$$T = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{\Theta - \Theta_1}{\Theta_2 - \Theta_1}$$

$$= 18.12 + (18.24 - 18.12)\frac{21.12 - 21.10}{21.20 - 21.10} = 18.144 秒。$$

④ 插值求 $\triangle$

$$\triangle = \triangle_1 + (\triangle_2 - \triangle_1)\frac{\Theta - \Theta_1}{\Theta_2 - \Theta_1} = 714 + (781 - 714)\frac{0.02}{0.10} = 727.4 米$$

⑤插值求 V_c

$$V_c = V_{c1} + (V_{c2} - V_{c1})\frac{\Theta - \Theta_1}{\Theta_2 - \Theta_1} = 195 米/秒。$$

⑥插值求 θ_c

$$\theta_c = \theta_{c1} + (\theta_{c2} - \theta_{c1})\frac{\Theta - \Theta_1}{\Theta_2 - \Theta_1} = 47.2° 。$$

插值的情况，可见于下表 7-4 所示。

表 7-4 $V_1 = 750$ 公里/小时 $H = 1400$ 米

$\Theta_1 = 21.10$	$T_1 = 18.12$ ↓	$\triangle_1 = 714$ ↓	$V_{c1} = 196$ ↓	$\theta_{c1} = 47°$ ↓
$\Theta = 21.12$	$T = 18.144$	$\triangle = 727.4$	$V_c = 195$	$\theta_c = 47.2°$
$\Theta_2 = 21.20$	$T_2 = 18.24$ ↑	$\triangle_2 = 781$ ↑	$V_{c2} = 191$ ↑	$\theta_{c2} = 48°$ ↑

2. 需要二次插值的表解法

当自变量中有二个自变量与表中的标称值不相一致时，就需要进行二次插值，才能求得所需的弹道诸元。

以水平轰炸弹道表为例，三头标自变量有三种组合情况：。HV_1 需要插值；Θ、H 需要插值；Θ、H 需要插值。（若为四头标弹道表，则共有 4 个自变量取 2 个的组合——6 种插值情况）。所用插值公式同（7－45）式。

现在举V_1、H两自变量插值的例子。已知投弹条件：$\Theta=20.80$秒；$V_1=865$公里/小时；$H=11650$米，利用三头标轰炸弹道表查弹道诸元的T和$\triangle$。

水平轰炸弹道表的标称值，只有V_1为850公里/小时和900公里/小时；H为11600米和11800米。所以对于$V_1=865$公里/小时和$H=11650$米的投弹条件，需要二次插值求弹道诸元。其方法为：

按前面“1”中的方法，先固定$V_{1,1}=850$公里/小时，对$H_1=11600$米和$H_2=11800$米之间的点$H=11650$米插值，求得弹道诸元T'、$\triangle'$；再固定$V_{1,2}=900$公里/小时，对$H_1=11600$米和$H_2=11800$米之间的点$H=11650$米插值，求得弹道诸元T''、$\triangle''$；然后再对$V_{1,1}=850$公里/小时和$V_{1,2}=900$公里/小时之间的点$V_1=865$公里/小时插值。求得弹道诸元T、$\triangle$的值。可用表7-5表示之：

表 7-5 $\Theta=20.80$秒

$V_{1,1}$	H	T	$V=866$	$V_{1,2}$	H	T
850	11600	56.80 ↓		900	11600	57.04 ↓
	11650	$T'=56.95$ →	$T=57.02$ ↑		11650	$T''=57.19$ ←
	11800	57.40 ↑			11800	57.64 ↑

$V_{1,1}$	H	$\triangle$	$V=865$	$V_{1,2}$	H	$\triangle$
850	11600	3724 ↓		900	11600	4114 ↓
	11650	$\triangle'=3739$ →	$\triangle=3856$ ↑		11650	$\triangle''=4130$ ←
	11800	3783 ↑			11800	4179 ↑

由此可看出，二次插值（即二个自变量的插值）实际上需要按(7-45)式计算三次，才能得到诸元的值。

对于Θ、H组合和Θ、V_1组合的插值方法、与上述方法相同。

3. 需要三次插值的表解法

当自变量中有三个与表中的标称值不相一致时。需要进行三次插值，才能求得所需的弹道诸元。

以三头标水平轰炸弹道表为例，若Θ、H、V_1均不是标称值，可在上述“2”的基础上进行，先取所给Θ数值邻近的两个表中标称值Θ_1、Θ_2，固定Θ_1，做同“2”的插值求解，得弹道诸元值（例如得到T_1）；再固定Θ_2，做同“2”的插值求解，得弹道诸元值（例如得到T_2）；然后再插值求Θ所相应的弹道诸元值（例如T）。以T为例。如表7-6所示的表格形式。

4. 对于四头标的俯冲（或上仰）轰炸弹道表，可能需要一次、二次、三次甚至有可能需要四次插值。一、二、三次插值方法，与前述相同。四次插值方法在掌握了上述方法的基础上，也是不难做到的，这里就不多说了。

表 7-6

θ_1	H_1	V_1	T_1' ↓	θ V,H	θ_2	H_1	V_1	↓ T_1'
		V	T'				V	T'
		V_2	T_2' ↑				V_2	↑ T_2'
	H	V	↓ T_1 → ↑	T ←		H	V	↓ T_1 ← ↑
	H_2	V_1	T_1'' ↓			H_2	V_1	T_1''
		V	T''				V	T''
		V_2	T_2'' ↑				V_2	T_2''

四、现代空战的特点及给弹道计算带来的新问题

现代军用飞机多在跨、超音速时飞行作战，速度快，可攻击时间短。因此对地攻击的武器（例如炸弹），多用机外悬挂的方式，投弹后可增大飞机的机动能力。在投放时，要使用弹射投放，以减少飞机的“流场”对炸弹起始状态的干扰。并避免炸弹与飞机相碰撞。

对空中目标及地面目标的攻击，由于飞机速度快，进攻时间短，都要求火控系统的瞄准工作式及弹道诸元的计算精度要高，瞄准工作式与理论弹道诸元的误差不超过某一限度。通常的精度要求，是由飞机火控系统总体设计部门根据战术技术论证后提出，而不是随便确定的。

1. 对于弹射投放弹道的计算，关键问题在于确定炸弹的初始状态，有了初始状态，就能根据尾翼弹丸质心运动方程式及绕心摆动运动方程式，联合求解弹射投放弹道。

由尾翼弹丸的质心运动方程式（参阅（4-103 式）

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dU}{dt} = -CH(y_1)G(V,a)U, && ①\\
&\frac{dW}{dt} = -CH(y_1)G(V,a)W + g, && ②\\
&\frac{dx}{dt} = U = V\cos\theta, && ③\\
&\frac{dy}{dt} = W = V\sin\theta, && ④\\
&y_1 = H - y,\ V = \sqrt{U^2+W^2} && ⑤
\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}46)$$

炸弹在投放瞬间，弹轴方向与速度方向不重合而产生初始攻角 δ_0，δ_0 的产生是由于弹射投放而产生弹射攻角 δ_T 或由于飞机作侧滑飞行而产生侧滑角 α_{cH}、或由于飞机带攻角飞行而产生飞行攻角 α_f 以及炸弹悬挂时弹轴方向与机体纵轴方向不平行产生的攻角 α_p 等原因。起始攻角 δ_0 的方向并不一定在垂直于地面的航向平面内而在空间某一方向上，这个方向具有一定的随机性，视上述的各种起始因素而定。此外还应考虑投放瞬间，由于弹射力或流场干扰等因素而造成起始旋转角速度 $\dot{\delta}_0$ 的作用。

在 δ_0 及 $\dot{\delta}_0$ 的作用下，炸弹一方面产生稳定力矩，使攻角减小；同时在惯性作用下，

炸弹绕质心作摆动；在赤道阻尼力矩及衰减系数 b 的作用下，摆动幅值 δ_m 逐渐衰减；经过一段时间后 δ 趋于零。炸弹绕质心摆动的方向，与起始 δ_0 及 $\dot{\delta}_0$ 的方向有关，是在空间某一方向上的摆动。

由于攻角 δ 的作用，使阻力增大，实际弹道诸元与理论弹道诸元不相一致。称为炸弹绕心摆动对质心运动的影响。这时 (7-46)①②式变为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dU}{dt}&=-C(1+k\delta^2)H(y_1)G(V,a)U,\\ \frac{dW}{dt}&=-C(1+k\delta^2)H(y_1)G(V,a)W+g_0\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}47)$$

攻角的变化参阅 (6-86) 及 (6-92) 式为：

$$\delta_{\dot{\delta}0}=\frac{\dot{\delta}_0}{V_0k_u}e^{-b\bar{V}t}\sin(k_u\bar{V}t)\ ,\qquad\text{见(6-86)}$$

$$\delta_{\delta 0}=\delta_0e^{-b\bar{V}t}\left(\cos k_u\bar{V}t+\frac{b}{k_u}\sin k_u\bar{V}t\right),\qquad\text{见(6-92)}$$

式中：$\delta_{\dot{\delta}0}$ 为由起始角速度 $\dot{\delta}_0$ 而产生的攻角；$\delta_{\delta 0}$ 为由起始攻角 δ_0 所产生的攻角；V_0 为初速度；$\bar{V}$ 为某瞬时的速度 V 与 V_0 的平均速度；k_u 为稳定力矩特征数；$\left(k_u=\sqrt{\frac{\rho SlC'_m}{2A}}\right)$；$b$ 为衰减系数$\left[\ b=\frac{1}{2}\left(b_y+k_D-b_x-\frac{g\sin\theta}{V^2}\right)\right]$；$b_y=\frac{\rho SC'_y}{2m}$ 称为升力系数特征数；$b_x=\frac{\rho SC_x}{2_m}$ 称为阻力系数特征数；$k_D=\frac{\rho Sl^2C'_D}{2A}$ 称为赤道阻尼力矩系数特征数；C'_m 为稳定力矩系数导数；$M_u=\frac{1}{2}\rho V^2SlC'_m(M)\delta=A\cdot k_u^2\cdot V^2\cdot\delta$ 为稳定力矩；A 为赤道转动惯量。

当初始状态 $\dot{\delta}_0$ 和 δ_0 所引起的攻角的方向相同时，$\delta=\delta_{\dot{\delta}0}+\delta_{\delta 0}$。

参阅 (6-96)式，有

$$\delta=\sqrt{\left(\frac{\dot{\delta}_0}{V_0k_u}\right)^2+\delta_0^2}\ e^{-b\bar{V}t}\cdot\sin(k_u\bar{V}t+\varphi)。\qquad(7\text{-}48)$$

攻角 δ 的幅值为 $\delta_m=\sqrt{\left(\frac{\dot{\delta}_0}{V_0k_u}\right)^2+\delta_0^2}\ e^{-b\bar{V}t}$，

参阅第五章 § 5，为增大积分步长并简化计算，可取平均值 $\bar{\delta}^2$ 代替 δ^2，

$$\bar{\delta}^2=\frac{\delta_m^2\int_0^{T/2}\sin^2(k_u\bar{V}t+\varphi)dt}{T/2}=\frac{\delta_m^2}{2}。$$

即

$$\delta^2=\bar{\delta}^2=\frac{1}{2}\delta_m^2=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\dot{\delta}_0}{V_0k_u}\right)^2+\delta_0^2\right]e^{-2b\bar{V}t}。\qquad(7\text{-}49)$$

上式对于初始 $\dot{\delta}_0$ 和 δ_0 所引起的攻角的方向相近时具有普遍意义。

当 $\dot{\delta}_0$ 和 δ_0 所引起的攻角的方向不同时，(7-48) 式仍然适用，只不过是初相角 φ 的值不同而已。这时 δ 角的方向在空中某一方向上（不一定在航向平面内）。

当 $\delta<0.5°$ 时，若取修正系数 $k=20$，修正项 $k\delta^2$ 只有主项的0.15%，故可认为由于攻角较小，对弹道诸元的影响较小而可略去 δ 的作用。所以对 (7-47) 式的积分求解，可自

投弹点起，积分至 $\delta<0.5^\circ$ 时止，再转入 (7-46)式。

即：当 $\delta\geqslant 0.5^\circ$ 时有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dU}{dt}=-C(1+k\delta^2)\cdot H(y_1)\cdot G(V,a)U+a_{Tx}(t)\text{①}, && ①\\
&\frac{dW}{dt}=-C(1+k\delta^2)\cdot H(y_1)G(V,a)W+g+a_{Ty}(t), && ②\\
&\frac{dx}{dt}=U, && ③\\
&\frac{dy}{dt}=W。 && ④\\
&\delta^2=\frac{\delta_m^2}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\dot\delta_0}{V_0k_u}\right)^2+\delta_0^2\right]e^{-2b\bar V t}, && ⑤\\
&y_1=H-y, && ⑥\\
&\bar V=(V+V_0)/2, && ⑦\\
&V=\sqrt{U^2+W^2} && ⑧\\
&\theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{W}{U}。 && ⑨\\
&b=(b_y+k_D-b_m-g\sin\theta/V^2)/2 && ⑩
\end{aligned}\right\}\qquad (7\text{-}50)$$

初始条件：当 $t=0$时，$\delta=\delta_0$，$\dot\delta=\dot\delta_0$，$W=V_1\sin\lambda_a+V_T\cos\lambda_a$，$U=V_1\cos\lambda_a-V_T\sin\lambda_a$，$x=0$，$y=0$，可取 $k\approx 20$ 左右（参见第五章§5），λ_a为俯冲角，顺时针为正向。

对于向侧斜方向弹射投放的弹道计算，则必须考虑炸弹有侧方向的弹射运动速度 V_z（或侧方向弹射分力加速度 $a_{Tz}(t)$。炸弹在 δ_0 及 $\dot\delta_0$ 的作用下，偏出航向平面向侧方作衰减摆动。如图 7-20 所示。摆动的方向在空间的某个方向上。

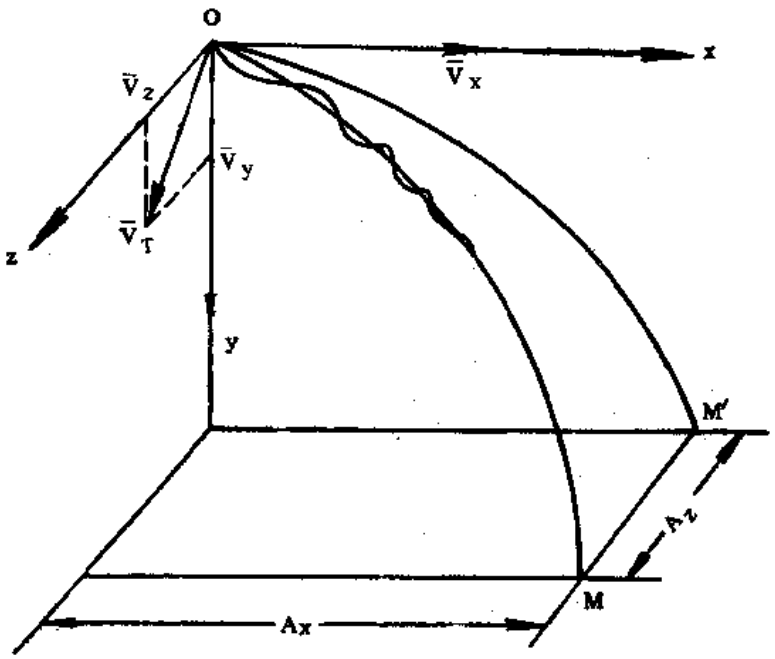


图 7-20　偏出航向平面作衰减摆动的侧斜方弹射轰炸弹道图

① 式中：a_x是弹射力所产生的加速度，它是时间 t 的函数。
当$\delta<0.5^\circ$时，取$\delta=0$代入上述①、②式中即可。

描述侧斜方向弹射投放弹道的质心运动及绕心摆动方程式在(7-50)式的基础上添加若干个方程式，为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{dV_x}{dt} = -C(1+k\delta^2)H(y_1)\cdot G(V,a)\cdot V_x + a_{Tx}(t), && ①\\
&\frac{dV_y}{dt} = -C(1+k\delta^2)H(y_1)\cdot G(V,a)\cdot V_y + g + a_{Ty}(t), && ②\\
&\frac{dV_z}{dt} = -C(1+k\delta^2)\cdot H(y_1)G(V,a)\cdot V_z + a_{Tz}(t), && ③\\
&\frac{dx}{dt} = V_x, && ④\\
&\frac{dy}{dt} = V_y, && ⑤\\
&\frac{dz}{dt} = V_z, && ⑨\\
&\delta^2 = \frac{\delta_m^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\dot{\delta}_0}{V_0 k_u}\right)^2 + \delta_0^2\right]e^{-2b\bar{V}t} && ⑦\\
&y_1 = H - y, && ⑧\\
&\bar{V} = (V + V_0)/2, && ⑨\\
&V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, && ⑩\\
&\theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2}}, && ⑪\\
&\theta_z = \mathrm{tg}^{-1}\frac{V_y}{V_x}。 && ⑫\\
&b = (b_y + k_D - b_x - g\sin\theta/V^2)/2 && ⑬
\end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}51
$$

初始条件：$t=0$，$x、y、z=0$，$\delta \approx \delta_0$，$\dot{\delta}=\dot{\delta}_0$，$V_{x0}=V_1\cos\lambda_\alpha - V_T\sin\lambda_\alpha\cdot\cos\beta$，

$V_{y0}=V_1\sin\lambda_\alpha + V_T\cos\lambda_\alpha\cos\beta$，$V_{z0}=V_T\sin\beta$。

上式中，$a_{Tx}(t)$、$a_{Ty}(t)$、$a_{Tz}(t)$ 分别为弹射力加速度在x，y，z 三个坐标轴上的分量，λ_α为俯冲角，β为侧向弹射角(弹射力方向与铅垂平面间的夹角)。θ_z为弹射弹道侧向倾角。θ 为弹射弹道切线倾角。

同前述道理，当 $\delta < 0.5°$时，(7-51)①、②、③式中可略去δ的作用。

上式中V_T为弹射初始速度，视弹射作用以力或加速度或初始速度的形式而决定其有无。若给定弹射力而无初速，则$V_T=0$，若给出弹射初速而作用时间极短，则弹射力加速度为零。

2. 低空投放外挂式低阻炸弹时，为了防止产生“跳弹”现象，需设法增大弹着角θ_c，因而在战术上采用上仰投弹或向后甩投的投弹方式，这种作战方式还适用于投掷核炸弹，在弹道计算上没有什么特殊的地方。另一方面在技术上则采用带阻力伞低阻炸弹，当悬挂于飞机上时，阻力伞处于收拢状态，一旦炸弹离开飞机，阻力伞立即张开，使炸弹的阻力猛增，弹道切线倾角θ增大较快，可避免产生“跳弹”现象。常用的有纤维织物阻力伞或机械式织物伞。如图 7-21(a)，(b)所示。要计算带伞炸弹的弹道，只要测得带伞炸弹的阻力系数

$C_{x0}(M)$，有攻角时的修正系数 k 值以及 k_u。k_D，b_y，b_z 等值，便可仿照(7-46)、(7-50)和(7-51)式分别计算带阻力伞炸弹的无弹射投放、正弹射投放及侧斜弹射投放弹道诸元。

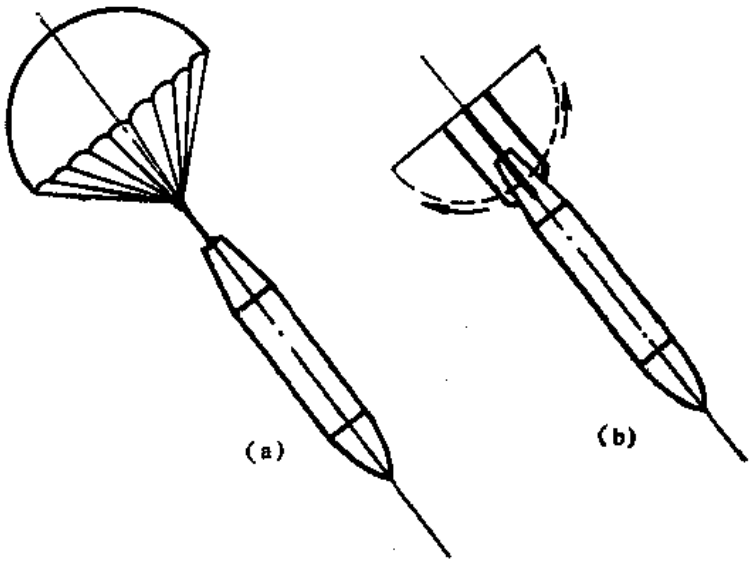


图 7-21 带阻力伞的低空低阻炸弹图
(a)纤维织物阻力伞炸弹 (b)机械式织物阻力伞炸弹

第七章 习 题

7-1 用 7.65 毫米弹丸作阻力系数试验，测得 $q=0.012$ 公斤，$h=748$ 毫米汞柱，$t=17°C$，$e=6.35$ 毫米汞柱，$V_1=747$米/秒，$V_2=717$ 米/秒，$L=50$米，试求，C_{x0}，$i_{西}$ 及 $C_{西}$。

7-2 同上题数据，并知 $x_1=10$ 米，试求 V_0。

7-3 某次试验中，使用弹丸参数同 7-1 题，用雷达测速仪及气象仪测得如下表数据，试用 (7-20) 式求 $C_{x0}(M)$、i 及 C。

t[毫秒]	100	200	300
V[米/秒]	688.8	615.2	526.8
h[毫米]	756.0	756.0	755.5
τ[°K]	314.3	314.3	312.8

7-4 37 毫米弹丸射击试验时，测得 $d=0.037$米，二心距 $h=0.057$米，$A=1.134\times10^{-4}$ 公斤·米·秒^2，$A/B=10$，缠度 $\eta=30$，章动周期 $T=5.4\times10^{-2}$秒，$H(y)=1.061$，$\tau_{0N}/\tau=1.062$ $\bar{V}=626$ 米/秒，$V_0=720$ 米/秒，试由 (7-24)式求 $K_m(\bar{M})$。($\bar{M}$为平均M数，下同)。

7-5 某尾翼弹模型做炮击试验时，测得 $d=0.043$ 米，$l=0.3$ 米，$A=6.139\times10^{-4}$公斤·米·秒^2，$\bar{V}=400$ 米/秒，摆动波长 $\lambda=28.3$ 米，$\delta_{m1}=9.1°$，$\delta_{m2}=6.2°$，压强 $h=756$ 毫米汞柱，$\tau=310°K$，试由 (7-27) 式求 $k_u(\bar{M})$、$C'_m(\bar{M})$，由 (7-29) 式求 b，并近似求 $k_D(\bar{M})$，$C'_D(\bar{M})$。

第八章　应用电子计算机进行弹道计算的程序设计

§1　引言

电子计算机是一种能自动地高速度地高效率地进行计算的电子装置，它的出现是二十世纪在科学技术方面的卓越成就之一。现在，随着计算机工业的发展；计算机科学已成为一门新兴的学科。

由于电子数字计算机具有高速运算、逻辑判断和大量记忆的功能，使得大量繁琐的工程计算或者人工难以完成的计算，都得到了令人信服的解决。

应用电子计算机进行航空弹道的研究与计算，还是最近十几年的事，一旦采用了它，就获得十分满意的效果。

用算法语言（如FORTRAN语言、BASIC语言以及ALGOL语言等）编写程序，既直观通用，又便于学习和掌握，这就大大地促进了电子计算机在各个领域内的广泛应用。

我们这一章主要介绍应用电子计算机进行弹道计算的程序设计。通过FORTRAN语言编写程序，来具体地讲述空中射击弹道和轰炸弹道计算方面的程序设计问题。

§2　空中射击弹道计算的FORTRAN程序设计

一、　射击弹道微分方程组的建立

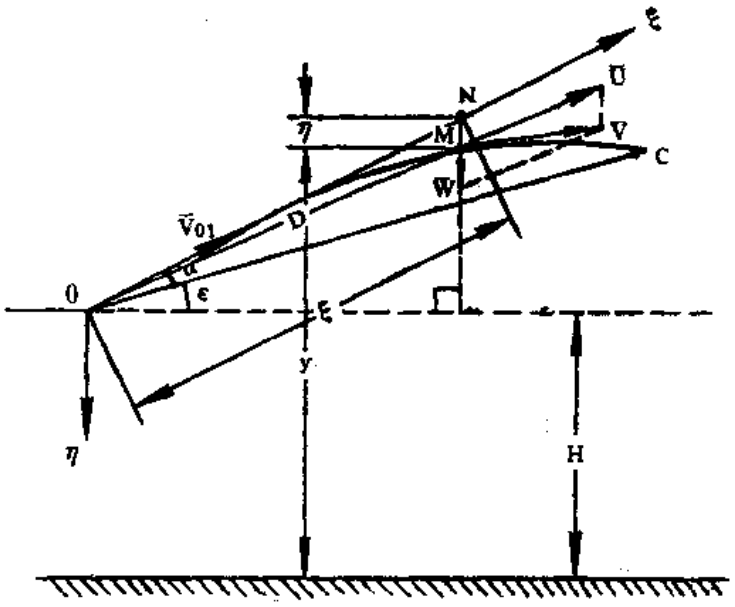


图 8-1　空中射击弹道的示意图

图中符号：O——发射点；C——命中点；M——弹道上的任意一点；H——发射点O距地面的高度；y——M点距地面的高度；D——斜距离（即距离OM之长）；η——弹道

降低量；ε——目标高低角；α——抬高角；$\bar{V}_{01}$——弹丸的绝对初速矢量；$\bar{V}$——弹丸在弹道上任意一点的速度矢量；U——$\bar{V}$ 在 ξ 方向上的速度分量；W——$\bar{V}$ 在 η 轴方向上的速度分量。

由图 8-1 可知，M点距地面的高度 y 可写成下式：

$$y=\xi\sin(\alpha+\varepsilon)-\eta+H$$

弹丸质心运动矢量方程式

$$\frac{d\bar{V}}{dt}=\bar{J}+\bar{g}$$

式中：$\bar{J}$——空气阻力加速度矢量；

$\bar{g}$——重力加速度矢量。

由本书第一章可知，空气阻力加速度矢量（当忽略音速 a 随高度而变化时）应为

$$\bar{J}=-CH(y)G(V)\bar{V}$$

式中：C——弹丸的弹道系数。

将弹丸质心运动矢量方程式在斜坐标系 $\xi o\eta$ 中投影，可以得到质心运动方程组为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=-CH(y)G(V)U\\\frac{dW}{dt}&=-CH(y)G(V)W+g\\\frac{d\xi}{dt}&=U\\\frac{d\eta}{dt}&=W\end{aligned}\right\}\qquad(8\text{-}1)$$

上式参阅(2-10)式

初始条件：当时间 $t=0$ 时，$U=V_{01}$，$W=0$，$\xi=0$，$\eta=0$；在认为射击弹道比较平直的前提下，$H(y)G(V)\approx H(H)G(U)$，上述方程组(8-1)式经简化并改成以 $CH(H)D$ 为自变量，便可得出如下方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{dU}{dC_HD}&=-G(U)\\\frac{dP}{dC_HD}&=\frac{1}{C_H}\cdot\frac{g}{U^2}\\\frac{d\eta}{dC_HD}&=\frac{1}{C_H}\cdot P\\\frac{dt}{dC_HD}&=\frac{1}{C_H}\cdot\frac{1}{U}\end{aligned}\right\}\qquad(8\text{-}2)$$

上式参阅（4-3）式

初始条件：当 $C_HD=0$ 时，$U=V_{01}$，$P=0$，$\eta=0$，$t=0$。

其中，$C_H=CH(H)$，$P=\dfrac{W}{U}=\dfrac{d\eta}{d\xi}$。

方程组(8-2)第一个方程的积分，其阻力函数 $G(U)$可近似地用 $G(V_\tau)$ 来代替，即按西亚切阻力定律所得到的阻力函数，以表格函数的形式进行插值计算（V_{01} 的范围取从 0 到 1500米/秒），来得到 $G(U)$值。

当令

$$P_H = P \cdot C_H$$
$$\eta_H = \eta \cdot C_H^2$$
$$t_H = t \cdot C_H$$

则有

$$P = P_H / C_H$$
$$\eta = \eta_H / C_H^2$$
$$t = t_H / C_H$$

代入上面的方程组(8-2)，可得：

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{dC_HD} &= -G(U) \\ \frac{dP_H}{dC_HD} &= \frac{g}{U^2} \\ \frac{d\eta_H}{dC_HD} &= P_H \\ \frac{dt_H}{dC_HD} &= \frac{1}{U} \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}3)$$

初始条件：当 $C_HD = 0$ 时，$U = V_{01}$，$P_H = 0$，$\eta_H = 0$，$t_H = 0$。

同时，可以巧妙地得出弹丸平均速度 V_{PJ} 的表示式

$$V_{PJ} = \frac{D}{t} = \frac{C_HD}{C_Ht} = \frac{C_HD}{t_H}$$

这就使得 $V_{PJ}(C_HD, V_{01})$表的计算大大简化了。只要将自变量 C_HD 除以对应的 t_H，就可求得 V_{PJ} 值。

二、 射击弹道计算的 FORTRAN 语言程序设计

下面我们讲述，用 FORTRAN 语言，对空中射击弹道进行研究和计算的这一部分内容，随后可知采用这种方法与其它方法比较，花的时间短，却又能得到同样的满意结果。

在计算过程中，编制了如下程序（请见 279 页到 283 页）：

(1)空中射击弹道表的 FORTRAN 语言的主程序；

(2)调用龙格——库塔法解微分方程组数字库所用的子程序：

a· 计算射击弹道微分方程组右函数的常规子程序 FCT；

b. 输出子程序 OUT；

(3)打印 $G(V_c)$函数表的子程序 SUBROUTINE DYGV；

(4)打印弹道表头的子程序 SUBROUTINE DYT；

(5)为了计算微分方程的右函数所用到的函数子程序 FUNCTION GU(U)

利用上述各程序，对弹丸运动的微分方程组(8-3)进行计算，就可分别得到对应不同的 C_HD(0～8000)和 V_{01}(200米/秒～1500米/秒)情况下的 U、P_H、η_H、t_H、V_{PJ} 的值，并打印出相应的空中射击弹道表：$U(C_HD, V_{01})$、$P_H(C_HD, V_{01}) \times 10^8$、$\eta_H(C_HD, V_{01})$、$t_H(C_HD, V_{01})$和 $V_{PJ}(C_HD, V_{01})$等（具体得到的上述一系列射击弹道表从略）。

1. 主程序

主程序主要完成输入 $G(V_\tau)$ 表的数据，调用数学库龙格——库塔法来解微分方程组，以及调用打印弹道表子程序并打印空中射击弹道表等任务。

弹道表分五部分，其格式如下：

KONG ZHONG SHE JI DAN DAO BIAO

$U(C_HD, V_{01})$

V01 / CHD	200	225	……	425
0	……			
100	……			

表中参量说明：V01——弹丸的绝对初速度 V_{01}；

CHD——弹道系数 C、高度函数 $H(H)$ 与目标距离 D 三者的乘积。

程序中变量对照：

VTAO	Y(1)	Y(2)	Y(3)	Y(4)	VO(J)
V_τ	U	P_H	η_H	t_H	V_{01}

在调用数学库龙格——库塔法时，所需的子程序和数组：

1) 计算微分方程的右函数的子程序 SUBROUTINE FCT(X,Y,DERI, NDIM)；

2) 输出子程序 SUBROUTINE OUT(X, Y, DERI, NDIM, PARA)；

3) 调用需要加控制卡片：

格数：1 11

字符：· FETCHB LN:MATHLIB, DV:MDO, GN:1, VN:0, FN:SRKG

和专门的调用语句 CALL SRKG(PARA, DERI, Y, NDIM, NBER, ERROR, TAB)

4) 数组和参数：

① PARA：大小为 5 的输入、输出数组，它包括下列各元素：

PARA(1)——积分区间下限，积分变量为 C_HD；

PARA(2)——积分区间上限；

PARA(3)——增量的初值，PARA(3) = 10.；

PARA(4)——误差的上限，PARA(4) = 1E - 6；

PARA(5)——输出参数，其初值 PARA(5) = 0.

② DERI：大小为 4 的数组，表示函数 $f(x,y)$，即方程组的右端项；

③ Y：大小为 4 的数组，输入时装函数的初值，以后每进行一步来装所考虑点 x 上由计算而得的函数值；

④ NDIM：方程的个数（它等于 4）；

⑤ NBER：输出参数，它能指出初始积分步长的对分次数；

⑥ ERROR：大小为 NDIM 的数组，用它来表示包含在计算误差测试 δ 时所赋给的系数(权)，取 ERROR(I) = 0.25，即

$$\delta = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{n} a_i \left| y_i^{(1)} - y_i^{(2)} \right|$$

其中 a_i——权函数，用 ERROR(I) 表示，空中射击弹道的计算中，共四个方程平均分配取 ERROR(I) = 0.25。

⑦ TAB：大小为 7 行 4 列的辅助工作数组。

具体主程序见 279 页

2. 子程序

共五个，其中有四个常规子程序：

SUBROUTINE FCT(X, Y, DERI, NDIM)；

SUBROUTINE OUT(X, Y, DERI, NBER, NDIM, PARA)；

SUBROUTINE DYGV；

SUBROUTINE DYT(VO, S)；

还有一个函数子程序 FUNCTION GU(U)。

其中的参数，除上面已指出外，还有：

X——变量 x；

GU——微分方程组的第一个方程的右端项 $G(U)$；

GV——表格函数 $G(V_T)$，是一维数组 GV(1051)；

VO——一维数组，共十个元素，装 V_{01} 的值；

除上述外，还定义了如下数组：

U(71,10)——用来装在 ξ 轴方向上的速度分量；

PH(71,10)——用来装 $P_H = C_H P$；

ETAH(71,10)——用来装 $\eta_H = \eta(C_H)^2$；

TH(71,10)——用来装 $t_H = t \cdot C_H$；

VPJ(71,10)——用来装 V_{PJ} 的值；

CHD(71)——用来装自变量 $C_H D$。

具体子程序见 281 页

三、 几 点 说 明

1. 计算对应不同速度的 $G(U)$，在程序设计中采用线性插值法，实践证明是可行的，在精度上可以达到要求。当然，采用抛物线插值法来计算会提高一点精度，但却要相应地增加计算的工作时间。

2. 解空中射击弹道的微分方程组，采用龙格—库塔法，不仅使程序的编写能达到语句少、效率高和紧凑明瞭，而且还充分地发挥了 FORTRAN 语言本身的作用，在弹道计算的精度上又能得到满意的结果。

用龙格—库塔法解微分方程组的程序，既可以自编，又可以调用计算机厂家所建立的数学库。

3. FORTRAN 语言属于计算机的高级语言，通过教学实践和科学研究可以断言：FORTRAN 语言在科学技术领域内具有着广泛的用途，在航空弹道的研究与计算上它也是不可缺少的重要工具。程序设计的关键，不仅在于熟炼地掌握算法语言的规定，而且还必须

具备一定的专业知识和计算数学的知识。

对算法语言本身，学起来觉得条条框框多、规定多和注意事项多，用起来也要费一番考虑，能熟炼地运用它，去巧妙地解决一些相当复杂的实际问题，却会给人们带来一定的乐趣。程序设计犹如我国传统的棋术，把它概括成十六个字“简中寓繁，静中有动，千变万化，其乐无穷”来作为我们奉献给读者的一点感受吧。

四、 使用弹道表的举例：

已给发射弹丸时的飞机飞行速度$V_1=200$米/秒，发射弹丸相对飞机的初速$V_0=800$米/秒，则有弹丸的绝对速度$V_{01}=V_0+V_1=1000$米/秒（注意：如果V_1和V_0方向不同，则$\overline{V}_{01}$为$\overline{V}_1$与$\overline{V}_0$的矢量和，即$\overline{V}_{01}=\overline{V}_0+\overline{V}_1$，然后以$V_{01}$值进行查表）。

飞机高度 $H=6000$米

目标距离 $D=1200$米

弹丸为23毫米口径的航空炮弹，其弹道系数$C=1.67$；再去查高度函数表(附表1)得$H(H)=H(6000)=0.538$，则$C_HD=C\cdot H(H)\cdot D=1.67\times0.538\times1200=1080$

由$C_HD=1080$，$V_{01}=1000$，查弹道表（见表8-1）得：$U(1000)=746.03$，$U(1100)=722.59$，利用线性插值：

$$U(1080)=746.03+\frac{722.59-746.03}{1100-1000}\times(1080-1000)=727.28\text{米/秒}$$

由表8-1查得：$P_H\times10^3(1000)=13.232$，$P_H\times10^3(1100)=15.052$，同样利用插值可得：

$$P_H(1080)=\left[13.232+\frac{15.052-13.232}{1100-1000}\times(1080-1000)\right]\div10^3=0.01468$$

则$P\approx P_H/C_H=0.1468/(1.67\times0.538)=0.01633$；

由表8-1查得：$\eta_H(1000)=5.9717$，$\eta_H(1100)=7.3849$，同样经插值可得：

$$\eta_H(1080)=5.9717+\frac{7.3849-5.9717}{1100-1000}\times(1080-1000)=7.0963$$

则$\eta=\eta_H/(C_H)^2=7.0963/(1.67\times0.538)^2=8.79$米；

由表8-1查得：$t_H(1000)=1.1573$，$t_H(1100)=1.2935$，同样经插值可得：

$$t_H(1080)=1.1573+\frac{1.2935-1.1573}{1100-1000}\times(1080-1000)=1.2663$$

则$t=t_H/C_H=1.2663/(1.67\times0.538)=1.4094$秒；

由表8-1查得：$V_{PJ}(1000)=864.11$米/秒，$V_{PJ}(1100)=850.43$米/秒，则同样插值得：

$$V_{PJ}(1080)=864.11+\frac{850.43-864.11}{1100-1000}\times(1080-1000)=853.1\text{米/秒}$$

五、 空中射击弹道表计算的程序

1. 主程序

```
C KONG  ZHONG SHE JI DAN DAO BIAO DI FORTRAN CHENG XU
        DIMENSION U(71,10), PH(71,10), ETAH(71,10), TH(71,10),
     &  VPJ(71,10), VO(10), PARA(5), DERI(4), Y(4), ERROR(4),
```

```
     &  TAB(7,4)
        COMMON /X/VTAO(1051), GV(1051)
        INTEGER A(4), B(4), C(4), D(4), E(4), CHD(71)
        DATA A, B, C, D, E/'␣␣␣U(CHD, V01)␣␣␣',
     &  '␣PH(CHD, V01)*1E3', '␣␣ETAH(CHD, V01)␣',
     &  '␣␣␣TH(CHD , V01)␣␣', '␣␣VPJ(CHD,V01)␣␣'/
        V01=200.
        DO 1 I=1, 1051
        VTAO(I)=FLOAT(I-1)
        IF(I.GT.1001) VTAO(I)=VTAO(I-1)+10.
1       CONTINUE
        READ(105,2) (GV(I), I=1, 1051)
2       FORMAT(10F8. 6)
        CALL DYGV
        DO 11 I=1,71
        CHD(I)=(I-1)*100
        IF(I.GT.61) CHD(I)=CHD(I-1)+200
11      CONTINUE
        PARA(5)=0.
        DO 12 I=1,4
12      ERROR(I)=0.25
13      CONTINUE
        DO 20 J=1,10
        VO(J)=V01
        Y(1)=VO(J)
        Y(2)=0.
        Y(3)=0.
        Y(4)=0.
        U(1,J)=VO(J)
        PH(1,J)=0.
        ETAH(1,J)=0.
        TH(1,J)=0.
        DO 21 I=2,71
        PARA(3)=10.
        PARA(4)=1E-6
        PARA(1)=FLOAT(CHD(I-1))
        PARA(2)=FLOAT(CHD(I))
        X=PARA(1)
        CALL SRKG(PARA, DERI, Y, 6, NBER, ERROR, TAB)
```

```
      U(I,J) = Y(1)
      PH(I,J) = Y(2) * 1E3
      ETAH(I,J) = Y(3)
      TH(I,J) = Y(4)
      VPJ(1,J) = VO(J)
      IF(I.GT.1) VPJ(I,J) = CHD(I)/Y(4)
   21 CONTINUE
      V01 = V01 + 25.
      IF(V01.GT.1500) GO TO 99999
   20 CONTINUE
99999 CONTINUE
      CALL DYT(VO,A)
      WRITE(108,30) ((CHT(I), (U(I,J), J = 1,10)), I = 1,71)
      CALL DYT(VO,B)
      WRITE(108,30) ((CHD(I), (PH(I,J), J = 1,10)), I = 1,71)
      CALL DYT(VO,C)
      WRITE(108,30) ((CHD(I), (ETAH(I,J), J = 1,10)), I = 1,71)
      CALL DYT(VO,D)
      WRITE(108,30) ((CHD(I), (TH(I,J), J = 1,10)), I = 1,71)
      CALL DYT(VO,E)
      WRITE(108,30) ((CHD(I), (VPJ(I,J), J = 1,10)), I = 1,71)
      IF(V01.GT.1500.) GOTO 150
      GOTO 13
   30 FORMAT(4X, I4, '␣|', 10F12.5)
  150 CONTINUE
      STOP
      END
```

2. 子程序

```
C     THIS IS THE SUBPROGRAM FCT FOR FINDING SRKG
      SUBROUTINE FCT(X, Y, DERI, NDIM)
      DIMENSION Y(4), DERI(4)
      DERI(1) = -GU(Y(1))
      DERI(2) = 9.81/Y(1)/Y(1)
      DERI(3) = Y(2)
      DERI(4) = 1./Y(1)
      RETURN
      END
C     THIS IS THE SUBPROGRAM OUTPUT FOR FINDING SRKG
      SUBROUTINE OUT(X, Y, DERI, NBER, NDIM, PARA)
```

```
      DIMENSION Y(4), DERI(4), PARA(5)
      RETURN
      END
C DA  YIN GV DI ZI CHENG XU
      SUBROUTINE DYGV
      COMMON /X/VTAO(1051), GV(1051)
      WRITE(108,3) (VTAO(I), I=1,10)
    3 FORMAT(50X, 'THE TABLE OF G(VTAO) FUNCTION'/10X,
     & 110(1H-)/10X, '|␣␣VTAO␣␣|', 10(4X, I1, 4X, 1H|)/10X,
     & 110(1H-))
      N=0
      M1=1
      M2=10
      DO 5 I=1,106
      K=(I-1)*10+1
      IF(I.EQ.106) M2=M1
      WRITE(108,4) VTAO(K), (GV(J),J=M1,M2)
    4 FORMAT(10X,1H|,2X,I4,3H␣␣|,10(F8.6,2H␣|))
      M1=M1+10
      M2=M2+10
      N=N+1
      IF(N.EQ.10) GO TO 6
      GO TO 5
    6 WRITE(108,7)
    7 FORMAT(1H0)
      N=0
    5 CONTINUE
      WRITE (108,8)
    8 FORMAT (10X,110(1H-))
      RETURN
      END
C HAN  SU ZI CHENG XU GU(U)
      FUNCTION GU(U)
      COMMON /X/VTAO(1051), GV(1051)
      DO 10 I=1,1050
      IF(U.GE.VTAO(I).AND.U.LE.VTAO(I+1)) GOTO 20
   10 CONTINUE
   20 GU=GV(I)+(GV(I+1)-GV(I))/(VTAO(I+1)-VTAO(I))*(U
     & -VTAO(I))
```

```
      RETURN
      END
C DA  YIN BIAO TOU ZI CHENG XU
      SUBROUTINE DYT(VO,S)
      DIMENSION VO(10), S(4)
      INTEGER S
      WRITE(108,100)
  100 FORMAT(51X,'KONG ZHONG SHE JI DAN DAO BIAO'//)
      WRITE(108,200) S
  200 FORMAT(58X,4A4/1X,132(1H-))
      WIRTE(108,300)
  300 FORMAT(5X,'V01␣|')
      WRITE(108,400) VO
  400 FORMAT(10X,10(4X,I4,4X)/3X,'CHD␣␣|'/1X, 132(1H-))
      RETURN
      END
```

六、 空中射击弹道表

关于空中射击弹道表，计算结果共有五个表，它们是：$U(C_HD, V_{01})$表；$P_H(C_HD, V_{01})\times10^3$表；$\eta_H(C_HD,V_{01})$表；$t_H(C_HD,V_{01})$表；$V_{PJ}(C_HD,V_{01})$表。在此，由于篇幅所限，这五个表就不全部印出，只根据“四、使用弹道表的举例”部分的需要，摘列出其中两行（见表 8-1 ）。另外，还有 $G(V_*)$表，它是该弹道表计算的初始数据；还有高度函数表 $H(y)=\gamma/\gamma_{0N}$，在查表计算时，也要用到，可参阅本书的附表 7 和附表 1 。

表 8—1 空中射击弹道表的摘录部分

KONG ZHONG SHE JI DAN DAO BIAO

$U(C_HD,V_{01})$

C_HD \ V_{01}	950	975	1000	…	1175
0	950.00000	……	……		
100	923.74243	……	……		
⋮	⋮	⋮	⋮		
1000	……	……	746.02612		
1100	……	……	722.58813		

$P_H(C_HD, V_{01}) \times 10^3$

C_nD \ V_{01}	……	1000	……
⋮		⋮	
1000	……	13.23249	
1100	……	15.05246	

$\eta_H(C_HD, V_{01})$

C_nD \ V_{01}	……	1000	……
⋮		⋮	
1000	……	5.97168	
1100	……	7.38495	
⋮		⋮	

$t_H(C_HD, V_{01})$

C_nD \ V_{01}	……	1000	……
⋮		⋮	
1000	……	1.15726	
1100	……	1.29346	
⋮		⋮	

$V_{PJ}(C_HD, V_{01})$

C_nD \ V_{01}	……	1000	……
⋮		⋮	
1000	……	864.1086	
1100	……	850.4282	
⋮		⋮	

§3 轰炸弹道计算的FORTRAN程序设计

一、 轰炸弹道微分方程组的建立

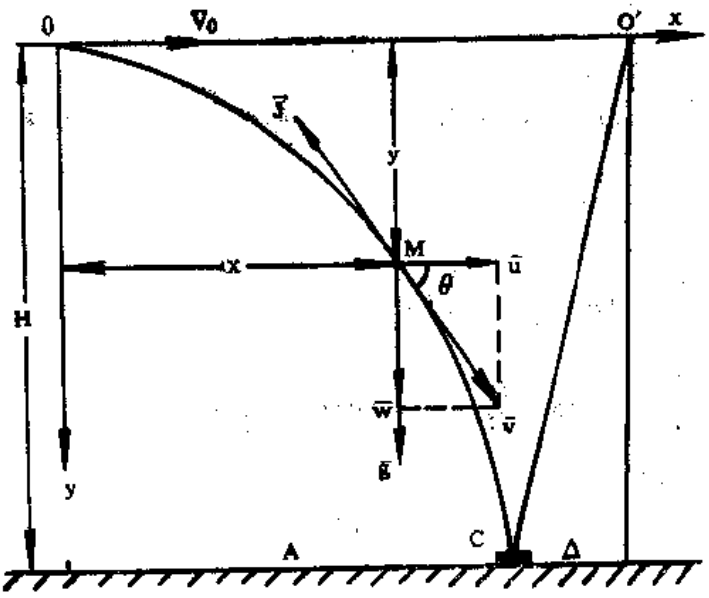


图 8-2 轰炸弹道的示意图

图中符号：O——炸弹投弹点；C——命中点；M——弹道上的任意一点；H——投弹点O距地面的高度(米)；y——炸弹离开投弹点O的垂直距离(米)；x——炸弹离开投弹点O的水平距离(米)；θ——炸弹速度矢量相对地平面的夹角(弧度)；V_0——炸弹的初速，如果是自由投放，则就是投弹时飞机飞行速度(米/秒)；V——炸弹相对气流的速度，若不考虑风的影响，V也就是炸弹相对地面的速度(米/秒)；$\bar{g}$——重力加速度(米/秒^2)，以9.806米/秒^2计；$\bar{J}$——空气阻力加速度(米/秒^2)；U——炸弹速度V在x轴上的分量米/秒)；W——炸弹速度V在y轴上的分量(米/秒)。

炸弹的质心运动矢量方程式仍为

$$\frac{d\bar{V}}{dt}=\bar{J}+\bar{g} \tag{8-4}$$

式中，空气阻力加速度$J=CH(H-y)G(V)V$。

假设：(1)空气阻力的方向与炸弹的速度矢量方向相反；

(2)重力加速度的方向和大小认为恒定不变，以9.806米/秒^2计；

(3)气象条件是标准的，地面气压、气温是标准值，并且它们都按标准的规律变化；

(4)不考虑地球的自转而产生的哥氏加速度；

(5)不考虑风的影响。

基于上述假设，如图8-2所示，飞机从O点投弹，便可列出下面的质心运动方程组。

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=-CH(H-y)G(V,a)V+g\sin\theta\\\frac{d\theta}{dt}&=\frac{g\cos\theta}{V}\\\frac{dx}{dt}&=V\cos\theta\\\frac{dy}{dt}&=V\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{8-5}$$

上式由(2-18)式变化而来。

为了计算的方便，在方程组(8-5)中增加三个辅助方程。令 $f_1=\sin\theta$，$f_2=\cos\theta$，则有：

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{g}{V}f_2$$

$$\frac{df_1}{dt}=\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{g}{V}f_2^2$$

$$\frac{df_2}{dt}=-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=-\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\frac{g}{V}=-\frac{g}{V}f_1f_2$$

同时，由气压计算公式可得

$$\frac{dh}{h}=\frac{dy}{R\tau}\tag{8-6}$$

上式参阅(1-24)式。

加之 $dy=V\sin\theta dt$ 代入(8-6)，又有

$$\frac{dh}{dt}=\frac{h}{R\tau}V\sin\theta=\frac{h}{R\tau}Vf_1$$

将 $\frac{dh}{dt}$，$\frac{df_1}{dt}$，$\frac{df_2}{dt}$，f_1，f_2 代入方程组(8-5)，就得到计算轰炸弹道弹道表的方程组。

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=-CN\frac{h}{\tau}V^2C_{\bar{x}0}\left(\frac{V}{a}\right)+gf_1\\\frac{d\theta}{dt}&=\frac{g}{V}f_2\\\frac{dx}{dt}&=Vf_2\\\frac{dy}{dt}&=Vf_1\\\frac{dh}{dt}&=\frac{h}{R\tau}Vf_1\\\frac{df_1}{dt}&=\frac{g}{V}f_2^2\\\frac{df_2}{dt}&=-\frac{g}{V}f_1f_2\end{aligned}\right\}\tag{8-7}$$

式中：$N=\frac{13.6\pi}{8R}\times10^{-3}$①；

R为气体常数，对于空气而言，等于29.27公斤·米/公斤·度；

τ为航弹所在高度上的大气虚拟温度(°K)；

h为航弹所在高度上的大气压强(毫米汞高)；

a为航弹所在高度上的音速，其变化规律为$a=20.074\sqrt{\tau}$；

$C_{\bar{x}_0}\left(\frac{V}{a}\right)$为标准航弹零攻角时的阻力系数，是一个表格函数。以250-2型航爆弹作为标准弹，其零攻角的阻力系数$C_{\bar{x}_0}$随M数的变化（即标准航弹的阻力定律），见附录的附表15；

C：弹道系数，其定义是在标准气象条件下，从高度2000米以144公里/小时飞行的水平飞机投下任意一种航弹下落到海平面所化的时间，就是这种航弹的标准落下时间Θ，对应Θ满足航弹微分方程组的弹道系数C值，即为Θ所对应的C值，

$$C=\frac{id^2}{q}\times10^3$$

式中：i为弹形系数

$$i=\frac{C_{x_0}\left(\frac{V}{a}\right)}{C_{\bar{x}_0}\left(\frac{V}{a}\right)}$$

d为航弹的最大直径(米)；

q为航弹重量(公斤)。

方程组(8-7)的初始条件：当时间$t=0$时，$V=V_0$，$x=y=0$，$\theta=\theta_0$，$h=h_H$，$f_1=f_{10}=\sin\theta_0$，$f_2=f_{20}=\cos\theta_0$；其中，θ_0为炸弹初速方向相对于地平面的夹角(弧度)，h_H为投弹

① $N=\frac{13.6\pi}{8R}\times10^{-3}$是由

$$CH(H-y)G(V)V=C\cdot H(H-y)\cdot F(V)=C\cdot\frac{\gamma}{\gamma_{0H}}\cdot\frac{\pi\gamma_{0H}}{8\times10^3}V^2C_{\bar{x}_0}\left(\frac{V}{a}\right)$$

$$=C\frac{\pi\cdot13.6h}{8\times10^3R\tau}V^2C_{\bar{x}_0}\left(\frac{V}{a}\right),$$

令

$$N=\frac{13.6\pi}{8R}\times10^{-3}$$

得来的。其中，航弹所在高度上的大气压强h的单位为毫米汞高；$F(V)=\frac{\pi\gamma_{0H}}{8\times10^3}V^2C_{\bar{x}_0}\left(\frac{V}{a}\right)$称为阻力函数或速度函数，在计算弹道时，常采用函数$G(V)$来代替$F(V)$，有

$$G(V)=\frac{F(V)}{V}=\frac{\pi\gamma_{0H}}{8\times10^3}VC_{\bar{x}_0}\left(\frac{V}{a}\right)$$

γ为航弹所在高度上的大气比重$\gamma=\frac{13.6h}{R\tau}$（当$h$的单位为毫米汞高时）；$\gamma_{0H}$为海平面的大气比重，在标准情况下为1.224公斤/米³。

点的大气压强(毫米汞高)，其变化规律用下列公式表示：

$$h = h_{ON}\left[1 - \frac{G}{\tau_{ON}}\cdot(H-y)\right]^{\frac{1}{RG}} \qquad (0 \leqslant y < 13000\text{米})$$

$$h = h(y_{顶})\, e^{-\frac{(H-y)-13000}{R\tau(y_{顶})}} \qquad (y \geqslant 13000\text{米})$$

式中：h_{ON} 为海平面的大气压，等于 760 毫米汞高；G 为对流层温度垂直递减率，它等于 5.862×10^{-3} 度/米；τ_{ON} 为海平面上的虚拟温度，它等于 288.4°K；$y_{顶}$ 为对流层顶的高度，它等于 13118 米。坐标原点在投弹点。

二、 轰炸弹道计算的FORTRAN语言程序设计

现在用 FORTRAN 语言，对轰炸弹道进行相应地计算。

在计算过程中要编制如下程序（参阅 292 页到 298 页）：

（1）轰炸弹道计算的 FORTRAN 语言的主程序，主程序的框图如图 8-3 所示。

该框图是按照如下的要求设计的：给出 5 个θ值，以对分法求出相对应的C值，然后对每一个C值，用高度从 100 米～18000 米（高度在 1000 米以下间隔为100米，1000米以上间隔为1000米）、速度从360公里/小时～1200公里/小时（速度在 400～1200公里/小时间隔都取为100公里/小时），计算出各点相应的轰炸弹道诸元：炸弹降落时间T(秒)、退曳△(米)、炸弹的落角θ(度)、炸弹的末速V_M(米/秒)、投弹的超越角ψ(度)和射程A(米)等等。并按表 8-2 格式进行打印，数据打印10行空一行。

表 8—2

OSEDA=××·××　　(C=·×××××)

H	V=×××.					
	T	DEDA	SEDA	VM	PSR	A

表8—2中各参量对照说明如下：

OSEDA	C	V	H	T	DEDA	SEDA	VM	PSI	A
θ	C	V	H	T	△	θ	V_M	ψ	A

（2）计算弹道函数的常规子程序 SUBROUTINE DDJS(VO,T,Y)；

（3）打印弹道表数值的常规子程序 SUBROUTINE DTY(T,VOM,Y,K)；

（4）利用定步长四阶龙格——库塔法解航弹微分方程组的子程序 SUBROUTINE RK(T,H,Y,YW)；

（5）计算航弹微分方程组右函数的子程序 SUBROUTINE FCT(Y,F)；

（6）利用线性插值法由M数自动查取阻力系数 $C_{x_0}(M)$的函数子程序 FUNCTION YP(X,Y,N,XP)；

（7）打印弹道表表头的子程序 SUBROUTINE DY(OSEDA,C,VO)；

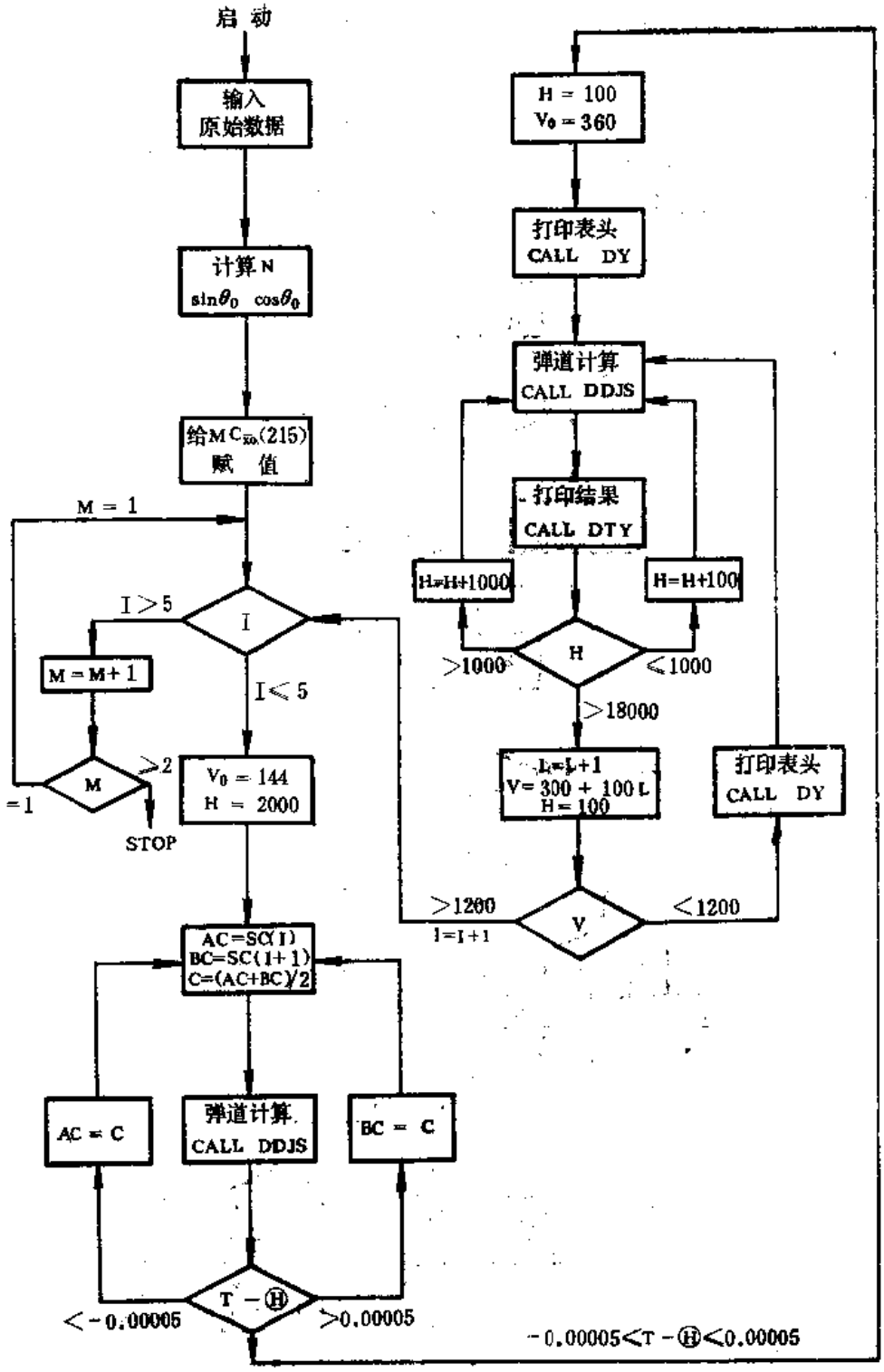


图 8-3 轰炸弹道表计算的主程序框图

（8）计算弹道函数的子程序 SUBROUTINE DDJS（VO,T，Y）所引用的两个函数子程序：

a. 计算 $1/\tau$ 的函数子程序 FUNCTION FON（X）；

b. 考虑炮兵用标准气象条件时计算 τ 的函数子程序 FUNCTION TAY（X,Z）等等。

其中，计算弹道函数的常规子程序 SUBROUTINE DDJS（VO，T，Y）的框图见图 8-4。其计算内容是在给定的高度、速度和弹道系数 C 的条件下，求解航弹微分方程组，计算出该点相应地轰炸弹道诸元。该子程序中的参量对照如下：

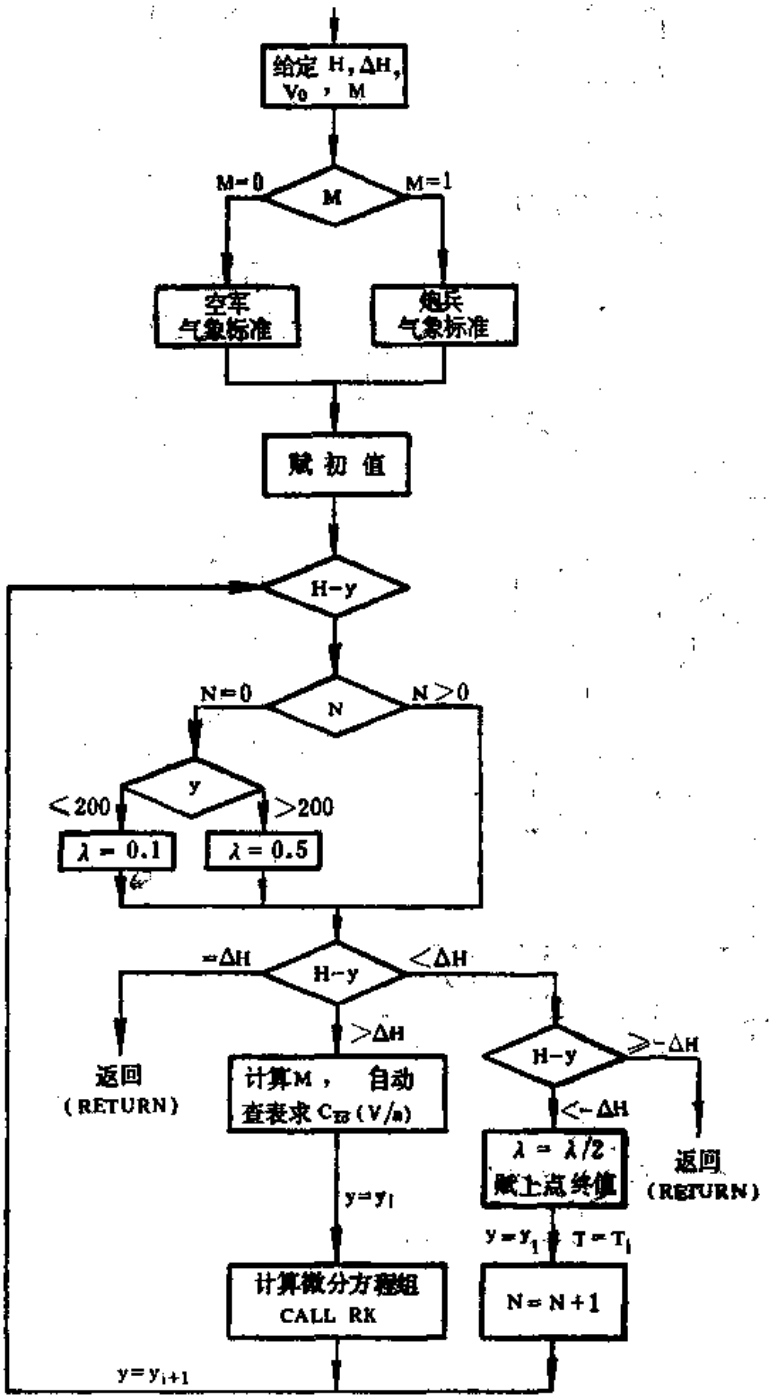


图 8-4 计算弹道函数的 DDJS 子程序框图

公式参量	V	θ	x	y	h	f_1	f_2	$C\bar{x}_0(M)$
程序中参量	Y(1)	Y(2)	Y(3)	Y(4)	Y(5)	Y(6)	Y(7)	ACXO

g	N	τ	R	H	θ_0	V_c(米/秒)	V_0(公里/小时)
AG	AN	TAUY	R	AH	Y20,SEDAO	VOM	VO

G	a	h_π	$\triangle H$	M	λ	Θ	Θ_0
G	A	PH	HZA	AM	H	OSEDA	OSEDAO

C	$H_{终}$	t	τ_π	τ_0	b	h_0	$\sin\theta_0$	$\cos\theta_0$
C	HZON	T	TAUH	TAUO	B	PO	Y80	Y70

说明：△H——控制高度的误差值；

λ——数值积分的步长；

W、WM、YW(7)、TW、VM、N——工作单元；

M——控制变量，当 $M=0$ 时，用空军标准气象条件，当 $M=1$ 时，用炮兵标准气象条件。

该子程序所涉及到的数组：

①Y：大小为 7 的一维数组，它的七个数组元素为

Y(1)——炸弹相对地面的速度(米/秒)；

Y(2)——炸弹速度方向与水平线之间的夹角（弹道切线倾角(度)）；

Y(3)——炸弹离开投弹点 O 的水平距离(米)；

Y(4)——炸弹离开投弹点 O 的垂直距离(米)；

Y(5)——炸弹所在高度上的大气压强 h（毫米汞高）；

Y(6)——弹道切线倾角的正弦值 $\mathrm{SIN}\theta=f_1$；

Y(7)——弹道切线倾角的余弦值 $\mathrm{COS}\theta=f_2$；

②YW：大小为 7 的一维数组，作为装数组 Y(7) 各元素的工作单元；

③MCXO：大小为 215 的一维数组，装附录的附表 15 的 $C\bar{x}_0$ 的序号；

④CXO：大小为 215 的一维数组，装附录的附表 15 零攻角阻力系数 $C\bar{x}_0$ 的值。从该表可知，当 M 数从 0 到 0.38 时，$C\bar{x}_0$ 的值均为 0.589，把它定义成 CXO(1)；当 M 数从 0.39 到 2.52 时，一共有 214 个 $C\bar{x}_0$ 的值，把它们分别定义成 CXO(2) 到 CXO(215)。

关于解袭炸弹道微分方程组，应采用龙格——库塔法的自编子程序，其原因是便于进行计算终止的控制。弹道计算到何时结束？从理论上说应计算到 $y=H$ 时结束，但实际上用龙格——库塔法编程计算，其计算一步是由步长来加以控制的，正好达到 $y=H$ 的机会很难得，要么达不到 C 点，要么超过 C 点（如图 8-5 所示）。在计算弹道函数的常规子程序 SUBROUTINE DDJS（VO，T，Y）中，是利用第25条语句来控制弹道计算的终止的，如何控制见图 8-5。第 22 条语句 $W=AH-Y(4)$，是表示 $W=H-y$。若积分计算到第 i 步，使得 $W-HZA=0$，即第 i 点进入高度控制公差带，则表示弹道计算到该点结束，转

到标号为10的语句，返回主程序段；若$W-HZA>0$，表示弹道计算尚未结束，继续计算，通过由M数去自动查表，再次调用龙格——库塔法的子程序；若$W-HZA<0$，表示弹道计算已经过头或进入高度控制公差带，转到标号为15的语句去进一步判别；当$W\geqslant -HZA$时，表示进入高度控制公差带，弹道计算结束，转到标号为10的语句，返回主程序段，当$W<-HZA$，即第i点积分的值已达到如图8-5上所示的位置，应当返回到第$i-1$点，减小步长另行计算。第41～48条语句就是为了实现这种设想的，即步长折半，赋给$i-1$点各参量的值（因为工作单元TW、YW中保留了$i-1$点的终值），然后，再GOTO50，重新进行判断与计算，直到满足要求为止。

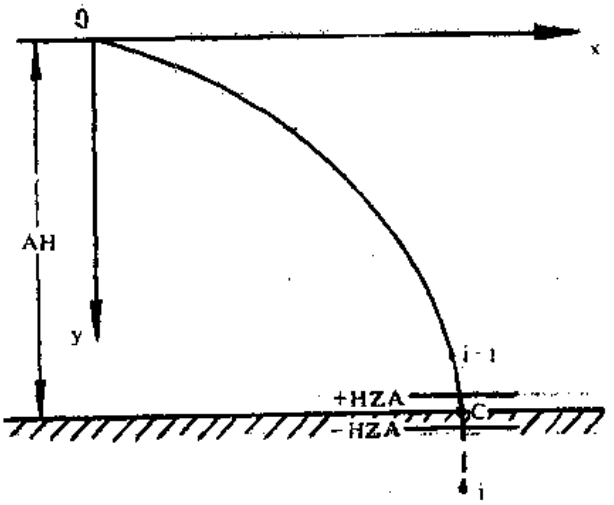


图 8-5 轰炸弹道计算的终止控制图

三、 轰炸弹道计算的程序

1. 主程序

标号	续行	内　　容
		DIMENSION Y(7), MCXO(215), CXO(215), SSEDA(5), SC(6)
		COMMON ACXO, AG, AN, C, TAUY, R, TW
		COMMON /D/MCXO, CXO, G, Y20, Y60, Y70, VOM/C/AH, M
		DATA SSEDA/20.3, 20.5, 21.0, 21.5, 22.0/
		DATA SC/0.0015, 0.06, 0.21, 0.4841, 0.751, 1.4/
		READ (105,1) CXO
1		FORMAT (16F5.3)
		DO 30 I=1, 215
30		MXO(I)=I
		READ(105,2) R, AN, AG, M, HZON, VZON, VZS, SEDAO
2		FORMAT(F5.2, E11.5, F5.3, I2, F6.1, 2F5.1, F8.4)
		Y20=SEDAO
		Y60=SIN(SEDAO)
		Y70=COS(SEDAO)
		DO 150 I=1,5
		VO=144.

```
      AH=2000.
      AC=SC(I)
      BC=SC(I+1)
1000  CONTINUE
      C=(BC+AC)/2.
      CALL DDJS(VO, T, Y)
      TZA=T-SSEDA(I)
      IF(TZA·LT·-0.00005)GO TO 25
      IF(TZA·GE·0.00005)GO TO 15
      SC(I)=C
      VO=VZS
      OSEDA=SSEDA(I)
      L=0
1100  CONTINUE
      CALL DY(OSEDA, C, VO)
      AH=100.
1200  CONTINUE
      CALL DDJS(VO, T, Y)
      K=0
      CALL DTY(T, VOM, Y, K)
      IF(AH·GE·1000.) AH=AH+1000.
      IF(AH·LT·1000.) AH=AH+100.
      IF(AH·GT·HZON)GO TO 1500
      GOTO 1200
      L=L+1
1500  VO=VZS+FLOAT(L)*100.
      IF(VO·GT·VZON)GO TO 150
      GO TO 1100
 150  CONTINUE
  25  AC=C
      GO TO 1000
  15  BC=C
      GO TO 1000
      STOP
      END
```

2. 子程序

语句序号	标号区	续行	语句内容
1			SUBROUTINE DDJS(VO, T, Y)
2			DIMENSION Y(7), YW(7), MCXO(215), CXO(215)
3			COMMON ACXO, AG, AN, C, TAUY, R, TW/C/AH, M
4			COMMON /D/MCXO, CXO, G, Y20, Y60, Y70, VOM
5			EXTERNAL FON
6			HZA=0.01
7			IF(M·EQ·1)GO TO 18
8			PH=760.*(1-AH*0.20319E-04)**5.83015
9			IF(AH·GE·13000.) PH=127.112*EXP(-(AH-13000.)
		1	/6211.094)
10	19		CONTINUE
11			VOM=VO/3.6
12			VM=VOM*Y70
13			N=0
14			T=0.
15			Y(1)=VM
16			Y(2)=Y20
17			Y(3)=0.
18			Y(4)=0.
19			Y(5)=PH
20			Y(6)=Y60
21			Y(7)=Y70
22	50		W=AH-Y(4)
23			IF(N·LT·1)GO TO 46
24	47		CONTINUE
25			IF(W-HZA)15, 10, 20
26	20		TAUY=288.4-0.00586*W
27			IF(W·GE·13000.)TAUY=212.2
28			A=20.074*SQRT(TAUY)
29			IF(M·EQ·1)GO TO 42
30	43		CONTINUE
31			AM=Y(1)/A
32			WM=(AM-0.37)*100.
33			IF(WM-1.) 21, 21, 22
34	21		ACXO=CXO(1)

语句序号	标号区	续行	语句内容
35			GO TO 23
36	22		ACXO=YP(MCXO, CXO, 215, WM)
37	23		CONTINUE
38			CALL RK(T, H, Y, YW)
39			IF(Y(1)·LE·0.)GO TO 15
40			GO TO 50
41	15		CONTINUE
42			N=N+1
43			IF(W·GE·-HZA)GO TO 10
44			H=H/2.
45			T=TW
46			DO 17 I=1,7
47	17		Y(I)=YW(I)
48			GO TO 50
49	18		CALL INSIM(FON, 0., AH, 1E-0.2, 1000, RH1, RH, KOD)
50			PH=750.*EXP(-1./R*RH)
51			IF(KOD·GT·O) WRITE(108, 41) KOD, AH, RH, PH
52	41		FORMAT(1X, I2, 5X, 4(G15.5, 5X))
53			GO TO 19
54	42		CONTINUE
55			TAUY=TAY(W, W)
56			A=20.07*SQRT(TAUY)
57			GO TO43
58	46		CONTINUE
59			IF(Y(4)·LE·200.)H=0.1
60			IF(Y(4)·GT·200.)H=0.5
61			GO TO 47
62	10		CONTINUE
63			RETUIN
64			END

语句序号	标号区	续行	语句内容
1			SUBROUTINE RK(T, H, Y, YW)
2			DIMENSION Y(7), YW(7), P(7), F(7), U(5)
3			COMMON ACXO, AG, AN, C, TAUY, R, TW
4			U(1)=0.5*H
5			U(2)=U(1)
6			U(5)=U(1)
7			U(3)=H
8			U(4)=H
9			TW=T
10			DO 1 I=1,7
11			P(I)=Y(I)
12	1		YW(I)=Y(I)
13			DO 2 J=1,4
14			CALL FCT(P, F)
15			T=TW+U(J)
16			DO 2 I=1,7
17			P(I)=U(J)*F(I)+YW(I)
18	2		Y(I)=U(J+1)*F(I)/3.0+Y(I)
19			RETURN
20			END

语句序号	标号区	续行	语句内容
1			SUBROUTINE FCT(Y, F)
2			DIMENSION Y(7), F(7)
3			COMMON ACXO, AG, AN, C, TAUY, R
4			Y71=Y(7)/Y(1)
5			Y16=Y(1)*Y(6)
6			Y6G=AG*Y(6)
7			Y7G=AG*Y(7)
8			F(1)=Y6G-Y(1)/TAUY*Y(1)*C*Y(5)*AN*ACXO
9			F(2)=Y7G/Y(1)
10			F(3)=Y(1)*Y(7)
11			F(4)=Y16
12			F(5)=Y(5)/R/TAUY*Y16
13			F(6)=Y7G*Y71
14			F(7)=-Y6G*Y71
15			RETURN
16			END

语句序号	标号区	续行	语句内容
1			FUNCTION YP(X, Y, N, XP)
2			INTEGER X
3			DIMENSION X(N), Y(N)
4			DO 10 I=2, N
5			IF(XP·LE·X(I)) GO TO 20
6	10		CONTINUE
7	20		J=I-1
8			YP=Y(J)+(Y(I)-Y(J))/(X(I)-X(J))*(XP-X(J))
9			RETURN
10			END

语句序号	标号区	续行	语句内容
1			SUBROUTINE DTY(T, VOM, Y, K)
2			DIMENSION TY(7), Y(7)
3			COMMON /C/AH, M
4			TY(1)=AH
5			TY(2)=T
6			TY(3)=VOM*T-Y(3)
7			TY(4)=Y(2)*57.296
8			TY(5)=Y(1)
9			TY(6)=ATAN(AH/Y(3))*57.296
10			TY(7)=Y(3)
11			WIRTE(108, 6) TY
12	6		FORMAT(12X, 3(F7.3, 4X), F5.2, 3(4X, F7.1))
13			K=K+1
14			IF(K·EQ·10)GO TO 24
15			GO TO 30
16	24		WIRTE(108, 7)
17	7		FORMAT(1H0)
18			K=0
19	30		RETURN
20			END

语句序号	标号区	续行	语句内容
1			FUNCTION FON(X)
2			COMMON /C/ AH, M
3			FON=1./TAY(X, AH)
4			RETURN
5			END

语句序号	标号区	续行	语句内容
1			FUNCTION TAY(X, Z)
2			WX=X-9300.
3			G=0.6328E-02
4			IF(Z·GE·0.·AND·Z·LE·9300.) TAY=288.9-G*X
5			IF(Z·GT·9300.·AND·Z·LE·12000.) TAY=230.+G*WX
		1	+0.1172E-05*WX*WX
6			IF(Z·GT·12000.) TAY=221.5
7			RETURN
8			END

语句序号	标号区	续行	语句内容
1			SUBROUTINE DY(OSEDA, C, VO)
2			WIRTE(108,4) OSEDA, C, VO
3	4		FORMAT(/////23X, 6HOSEDA=, F5.2, 31X, 3H(C=, F8.5,
		1	1H)/11X, 74(1H-)/22X, 1H\|/22X, 1H\|, 25X, 2HV=,
		1	F5.0/16X, 1HH, 3X, 1H\|, 63(1H-)/22X, 1H\|/22X, 1H\|, 5X,
		1	1HT, 8X, 4HDEDA, 6X, 4HSEDA, 6X, 2HVM, 7X, 3HPSI,
		1	8X, 1HA/11X, 74(1H-))
4			RETURN
5			END

四、 有关说明：

1. 利用线性插值由M数自动根据附录的附表15查取零攻角阻力系数$C\bar{x}_0(V/a)$的函数子程序FUNCTION YP(X, Y, N, XP)，经上机证明：用于弹道计算是完全可以满足要求，是成功的。当然，用抛物线插值会提高一定的计算精度，综合来看却没有线性插值那样简练和紧凑。

2. 用对分法求弹道系数C是可行的。弹道系数C与标准下落时间Θ的关系，对于中阻炸弹来说，可用下面的线性方程表示，即

$$\Theta = \Theta_0 + bc \tag{8-8}$$

式中：$\Theta_0 = 20.197$秒；

$$b = \frac{\sum_{j=1}^{n} \Theta_j \cdot C_j - 20.197 \sum_{j=1}^{n} C_j}{\sum_{j=1}^{n} C_j^2} \quad \text{（由最小二乘法）}$$

当$\Theta = 20.197 \sim 25.00$秒时，$b = 1.87$（误差1%以下）；

当$\Theta = 20.20 \sim 23.00$秒时，$b$采用1.864（误差0.4%以下）；

根据(8-8)可得

$$C = \frac{\Theta - \Theta_0}{b}$$

式中：$b = 1.864$；$\Theta_0 = 20.197$。

给定Θ求出近似的C值，在已给的C值中选取一个小于此值的C赋给SC(I)，选取一个大于此值的C赋给SC(I+1)，即开始AC=SC(I)，BC=SC(I+1)，得出$C_{计}$=(AC+BC)/2。再去调用DDJS子程序计算得到T与给定的Θ进行比较，令TZA=T-Θ，则

①当TZA>0.00005时，表示T>Θ，C的变化规律与Θ一致，有$C_{计} > C_{理}$，就将$C_{计}$赋给BC，见图8-6(b)，再取其中点为$C_{计}$重新计算，如此对分下去直到满足精度为止。

②当TZA<-0.00005，表示T<Θ，即有$C_{计} < C_{理}$，就将$C_{计}$赋给AC，见图8-6(c)，再取其中点为$C_{计}$重新计算，如此对分下去直到满足精度为止。

③若$-0.00005 \leqslant TZA \leqslant 0.00005$，（即$|TZA| \leqslant 0.00005$）时，就认为计算出$C$值已满足了精度的要求。

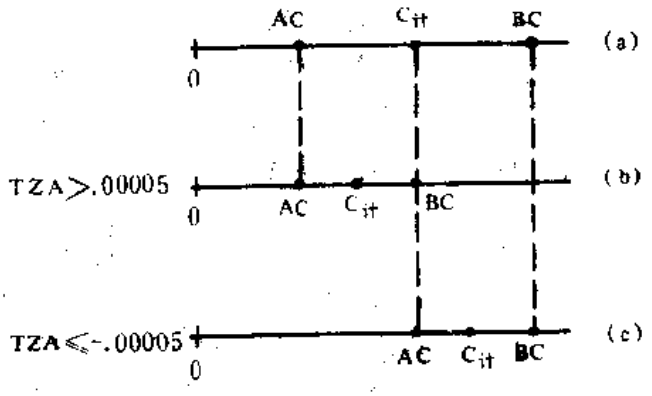


图 8-6 用对分法求弹道系数C的值示意图

计算C值的对分法，根据定义VO=144公里/小时，AH=2000米，在主程序段中实现。

3. 解微分方程组用的龙格——库塔法的子程序，是弹道计算程序的核心。在DDJS子程序中，用CALL RK(T, H, Y, YW)调用它。SUBROUTINE FCT(Y, F)是计算微分方程组右端项的子程序，在龙格——库塔法RK子程序中，用CALL FCT(P,F)调用它。应该指出：用龙格——库塔法解微分方程组时存在着稳定性的问题，要给予注意，其稳定性与微分方程右端项的系数和步长的选取有关。譬如，当H=35米，VO=1500公里/小时，来计算轰炸弹道诸元，开始取步长0.5秒就碰到过上述的稳定性问题，使得机器产生高浮点溢出而停机，后来，把步长改为0.25秒时，这个问题就不再出现。

步长的合理选取是非常重要的。它的选取除考虑保证稳定性和精度以外，还要考虑节约机时。四阶龙格——库塔法每一步要四次调用右函数，计算量是大的，加上弹道表的计算点

又很多，步长选取的越短，就要多耗费机时，应该指出：在保证计算稳定性和精度的前提下，步长选取的愈长愈节约机时。实践可知，在低高度、低速度时步长可选取的长一点（以步长为0.5秒为宜），在高高度和高速度时（高度＞1000米，速度＞1000公里/小时），步长要选取的短一点（以步长为0.1秒为宜）。

4. 关于标准气象条件，我们在程序中涉及到空军和炮兵气象标准，可见本书第一章的§5的第一部分。

音速、大气压强的计算公式为

音速 $a=20.074\sqrt{\tau(y)}$ ① （$0\leqslant y\leqslant 25$千米，$g=9.806$米/秒²时）

$a=20.08\sqrt{\tau(y)}$ （$0\leqslant y\leqslant 25$千米，$g=9.81$米/秒²时）

气压 $h=h_0\left(1-\frac{G}{\tau_0}y\right)^{\frac{1}{RG}}$ （$0\leqslant y<13000$米）

$h=h(y_{顶})e^{-\frac{y-13000}{R\tau(y_{顶})}}$ （$y\geqslant 13000$米）

炮兵气象标准用于计算投弹点时的大气压强h_H和虚拟温度τ，在程序中是通过FUNCTION FON(X)和FUNCTION TAY(X，Z)来计算的。

气压随高度y变化的关系式为

$$h=h_{ON}e^{-\frac{1}{R}\int_0^y\frac{dy}{\tau(y)}}$$

式中：h_{ON}——地面（通常为海平面）的大气压（毫米汞高）；R——气体常数。

用炮兵气象标准计算投弹点的大气压强h_H和虚拟温度τ时，在主程序中令$M=1$，在DDJS子程序中，由第7和57条语句分别转到语句18和43，进入按炮兵气象标准计算h_H和τ的值。在计算h_H时，需计算定积分，

$$\int_0^y\frac{dy}{\tau(y)}$$

该定积分是通过调用数学库（Felix C-256机）中的辛卜生法的计算定积分的子程序来进行的。在DDJS子程序中由第49条语句CALL INSIM（FON，0，AH，1E-02，1000，RH1，RH，KOD）来调用，在调用Felix C-256机数学库时，还需要在LINK卡片之前加一张FETCHB卡片，即：

```
1          11
.          FETCHB LN: MATHLIB, DV: MDO, GN: 1, VN: 0, FN: INSIM
```

① 式中的y为弹丸瞬时高度，当坐标原点取在投弹点时，y应取为$(H-y)$代入。

附　　录

一、 各物理量符号表

(一)大写英文字母

A　赤道转动惯量、水平射程

B　极转动惯量、相对湿度

C　弹道系数、弹着点、铅垂平面

C_x　阻力系数

C_y　升力系数

C_y'　升力系数导数

C_m　力矩系数

C_m'　力矩系数导数

C_D　赤道阻尼力矩系数

D　距离、弹道函数、赤道阻尼力矩、尾翼弹翼展

E　中间偏差量、压力中心

F　阻力函数名、弹道函数名、力

G　阻力函数名、温度梯度

H　射击(投弹)点所在高度

J　阻力加速度

K　弹道函数名、修正系数、空气绝热指数

K_m　力矩特征数

L　动量矩、弹道函数名

M　马赫数、力矩、目标点、弹丸某瞬时位置

M_f　翻转力矩

M_w　稳定力矩

M_p　推力偏心力矩

N　自然坐标轴、组数

O　坐标原点、射击点、投弹点

P　速度比、推力轴向分量

Q　速度头、空气阻力

R　气体常数、空气动力、弹道函数名

Rad 弧度

R_A　弹丸赤道惯量迴转半径

Sec 秒

S　弹丸横截面积、弹道弧长、倾斜平面

Ses 弹道弧长有效值

Soes有效滑轨长度

T　弹丸飞达目标的时间、周期、推力
U　轴向速度分量
V　速度
V_C　弹丸落速
V_1　飞机速度
V_0　弹丸炮口速度
V_{PJ}　平均速度
V_{01}　弹丸初始速度
V_g　火箭弹丸离滑轨瞬间相对速度
W　轴向速度分量
X　阻力
$\bar{X}$　距离平均值
Y　升力
$\bar{Y}$　高低量平均值
$\bar{Z}$　侧方量平均值

(二)小写英文字母

a　音速、加速度
$\bar{a}$　平均推力加速度
a_P　推力质量比
b　系数、衰减系数、翼弦长
b_x　弹丸阻力特征数
b_y　弹丸升力特征数
d　弹丸直径、口径
e　水蒸汽分压强
f　固有频率、函数名
g　重力加速度、弹道函数名
h　空气压强、质心压心距离
i　弹形系数、次数
k　系数、斜率
k_u　稳定力矩特征数
k_D　赤道阻尼力矩特征数
l　滑轨长度、弹丸长度
m　质心位置、力矩、质量、米
mm　毫米
n　自然坐标轴、频率、次数、发数
q　弹丸重量
$\dot{q}$　弹丸重量变化率
q_K　火箭弹丸被动段重量

q_g 火箭弹丸离滑轨瞬时重量
r 半径、矢径
r_0 弹丸自转角速度
f_e 尾翼弹丸自转的共振转速
s 弹道弧长
t 时间、温度
u 速度、中间变量
u_e 火箭弹有效排气速度
v 电磁波传播速度、弹丸速度
w 加速度、中间变量
x 坐标轴、变量
y 坐标轴、变量
z 坐标轴、变量

(三)下标意义

ON 地面标准值
PJ 平均值
r 相对值
g 炮口数值、滑轨段末值
k 主动段末点值
o 初始值
R 由空气动力产生的量
P 由推力产生的量
d 等效值
m 最大值、与力矩有关的值
H 与射击点高度有关的值
JS 极限值
τ 切线方向的量
N 法向方向的量
L 与马格努斯力有关的量
D 与赤道阻尼力矩有关的量
x 在 x 轴向上的量
y 在 y 轴向上的量
z 在 z 轴向上的量
C 在铅垂平面内的量
S 在倾斜平面内的量
L 与理想状态有关的量
LJ 临界量

(四)希腊字母

α 抬高角、飞机攻角、系数
β 系数、侧偏角
Δ 退曳长、误差增量、推力偏心距
γ 退曳角、空气重度、推力偏心角
δ 攻角、章动角、微小量
δ_P 动力平衡角
ε 目标高低角
θ 弹道切线倾角、侧偏修正角
Θ 炸弹标准落下时间
ξ 坐标轴、变量、斜距离、弹丸纵轴
η 坐标轴、变量、弹道降低量、炮管缠度
ζ 坐标轴、变量
μ 质量分布系数、角量
ν 进动角、角量
λ 俯冲角、摆动波长
ρ 空气密度、旋转半径
σ 旋转弹丸稳定因子
τ 虚拟温度、自然坐标轴
φ 轰炸瞄准角、弹道函数名、弹道切线与目标线夹角、摆动角、炮管缠角
ϕ 变量、翼弦角
ψ 弹道偏角、变量、瞄准超越角
ω 转动角速度、弹丸落角、火箭弹燃料重量
Ω 转动角速度

二、 附 表

1. 空气相对比重函数表 $H(y)=\dfrac{\gamma}{\gamma_{0N}}$
2. 空气相对压强函数表 $\pi(y)=\dfrac{h}{h_{0N}}$
3. 空气相对虚拟温度表$\sqrt{\tau_{0N}/\tau}$
4. 相对虚拟比重函数表$H_\tau(y)=\sqrt{\tau/\tau_{0N}}\cdot H(y)$
5. 相对湿度 $B=50\%$ 时的音速 $a(y)$表
6. 西亚切阻力定律表 $C_{\overline{x}_0}\left(\dfrac{V}{a}\right)$
7. 西亚切定律阻力函数 $G(V_\tau)$表
8. 西亚切定律西亚切主函数差值 $\delta D(V)$表
9. 饱和蒸汽(相对湿度 $B=100\%$)压强 $e(t^\circ)$表

10．火箭弹西亚切定律弹道函数$L(V)$表

11．火箭弹弹道函数$\varphi\left(\frac{V}{V_1}\right)$表

12．对数函数 $\ln\left(\frac{V}{V_1}\right)$表

13．西亚切定律弹道函数（g函数）简表

14．西亚切定律 K_{VPJ}函数简表

15．航空炸弹1969年阻力定律 $C_{x_3}(M)$表

16．虚拟温度 $\tau(y)$表

17．重力加速度 $g(y)$表

18．海平面上各纬度处的重力加速度$g(\lambda^\circ)$表

附表1 空气相对比重函数表 $H(y)=\frac{\gamma}{\gamma_{0N}}$

y[米]	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	1.000	0.990	0.981	0.971	0.962	0.953	0.943	0.934	0.925	0.916
1000	0.907	0.898	0.889	0.881	0.872	0.863	0.855	0.846	0.838	0.829
2000	0.821	0.813	0.805	0.797	0.789	0.781	0.773	0.765	0.757	0.749
3000	0.741	0.734	0.726	0.719	0.711	0.704	0.697	0.689	0.682	0.675
4000	0.668	0.661	0.654	0.647	0.640	0.633	0.627	0.620	0.613	0.607
5000	0.600	0.594	0.587	0.581	0.575	0.568	0.562	0.556	0.550	0.544
6000	0.538	0.532	0.526	0.520	0.515	0.509	0.503	0.497	0.492	0.486
7000	0.481	0.475	0.470	0.465	0.459	0.454	0.449	0.444	0.439	0.434
8000	0.429	0.424	0.419	0.414	0.409	0.404	0.399	0.395	0.390	0.385
10000	0.381	0.376	0.372	0.367	0.363	0.358	0.354	0.349	0.345	0.341
9000	0.336	0.331	0.327	0.323	0.319	0.314	0.310	0.306	0.302	0.297
11000	0.293	0.289	0.285	0.281	0.277	0.273	0.269	0.265	0.261	0.257
12000	0.253	0.249	0.245	0.241	0.238	0.234	0.230	0.227	0.223	0.220
13000	0.217	0.213	0.210	0.207	0.204	0.201	0.197	0.194	0.191	0.188
14000	0.186	0.183	0.180	0.177	0.174	0.172	0.169	0.167	0.164	0.162
15000	0.159	0.157	0.154	0.152	0.150	0.147	0.145	0.143	0.140	0.138
16000	0.136	0.134	0.132	0.130	0.128	0.126	0.124	0.122	0.120	0.119
17000	0.117	0.115	0.113	0.112	0.110	0.108	0.107	0.105	0.103	0.102
18000	0.100	0.099	0.097	0.096	0.094	0.093	0.091	0.090	0.089	0.087
19000	0.086	0.085	0.083	0.082	0.081	0.080	0.078	0.077	0.076	0.075
20000	0.074	0.072	0.071	0.070	0.069	0.068	0.067	0.066	0.065	0.064

附表 2　空气相对压强函数表　$\pi(y)=\frac{h}{h_{0N}}$

y[米]	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	1.000	0.988	0.976	0.964	0.953	0.942	0.931	0.920	0.909	0.898
1000	0.888	0.877	0.866	0.856	0.846	0.835	0.825	0.815	0.805	0.796
2000	0.786	0.776	0.766	0.757	0.748	0.738	0.729	0.720	0.711	0.702
3000	0.693	0.685	0.676	0.668	0.659	0.650	0.642	0.638	0.625	0.617
4000	0.609	0.601	0.594	0.586	0.578	0.571	0.563	0.556	0.549	0.542
5000	0.534	0.527	0.521	0.514	0.507	0.500	0.494	0.487	0.481	0.474
6000	0.467	0.461	0.455	0.448	0.442	0.436	0.431	0.425	0.419	0.413
7000	0.407	0.401	0.396	0.390	0.384	0.379	0.373	0.368	0.363	0.358
8000	0.353	0.348	0.343	0.338	0.333	0.329	0.324	0.319	0.314	0.309
9000	0.305	0.300	0.296	0.292	0.288	0.284	0.280	0.276	0.272	0.268
10000	0.264	0.260	0.256	0.252	0.248	0.244	0.240	0.236	0.233	0.230
11000	0.226	0.223	0.220	0.216	0.213	0.210	0.206	0.203	0.200	0.197
12000	0.194	0.191	0.188	0.185	0.182	0.179	0.177	0.174	0.171	0.169
14000	0.142	0.140	0.138	0.136	0.134	0.132	0.130	0.128	0.126	0.124
16000	0.105	0.103	0.101	0.0999	0.0983	0.0968	0.0953	0.0939	0.0924	0.0910
18000	0.0768	0.0756	0.0745	0.0733	0.0722	0.0711	0.0700	0.0689	0.0679	0.0669
20000	0.0564	0.0556	0.0547	0.0539	0.0531	0.0522	0.0514	0.0507	0.0499	0.0491

附表 3　空气相对虚拟温度表　$\left(\sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}\text{表}\right)$

y[米]	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	1.000	1.001	1.002	1.003	1.004	1.006	1.007	1.008	1.009	1.010
1000	1.011	1.013	1.014	1.015	1.016	1.017	1.018	1.019	1.021	1.022
2000	1.023	1.024	1.025	1.026	1.028	1.029	1.030	1.031	1.032	1.033
3000	1.035	1.036	1.037	1.039	1.040	1.041	1.042	1.043	1.044	1.046
4000	1.047	1.048	1.050	1.051	1.052	1.053	1.054	1.055	1.057	1.058
5000	1.059	1.061	1.062	1.064	1.065	1.066	1.068	1.069	1.070	1.072

续附表 3

y[米]	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
6000	1.073	1.074	1.076	1.077	1.078	1.080	1.081	1.082	1.084	1.085
7000	1.086	1.088	1.090	1.091	1.092	1.094	1.095	1.096	1.098	1.100
8000	1.101	1.103	1.104	1.106	1.107	1.109	1.110	1.111	1.113	1.114
9000	1.116	1.118	1.119	1.120	1.122	1.124	1.126	1.127	1.128	1.129
10000	1.130	1.131	1.132	1.133	1.134	1.135	1.136	1.137	1.138	1.139
11000	1.140	1.140	1.141	1.141	1.141	1.141	1.141	1.141	1.142	1.142*

* 12000米以后全是1.142

附表 4　相对虚拟比重函数表 $H_\tau(y)=\sqrt{\frac{\tau}{\tau_{ON}}}\cdot H(y)$

y[米]	000	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	1.000	0.989	0.979	0.968	0.958	0.948	0.937	0.927	0.917	0.907
1000	0.897	0.887	0.878	0.868	0.858	0.849	0.840	0.830	0.821	0.812
2000	0.803	0.794	0.785	0.777	0.768	0.759	0.750	0.742	0.733	0.725
3000	0.718	0.709	0.701	0.693	0.684	0.677	0.669	0.661	0.653	0.646
4000	0.638	0.631	0.623	0.616	0.609	0.602	0.594	0.587	0.580	0.573
5000	0.567	0.560	0.553	0.546	0.540	0.533	0.527	0.520	0.514	0.508
6000	0.501	0.495	0.489	0.483	0.477	0.471	0.465	0.460	0.453	0.448
7000	0.443	0.437	0.431	0.426	0.421	0.415	0.410	0.405	0.399	0.394
8000	0.389	0.384	0.379	0.374	0.369	0.365	0.360	0.355	0.350	0.346
9000	0.341	0.337	0.332	0.328	0.323	0.319	0.315	0.310	0.306	0.302
10000	0.298	0.293	0.289	0.285	0.281	0.277	0.273	0.269	0.265	0.261
11000	0.257	0.254	0.250	0.246	0.243	0.239	0.235	0.232	0.228	0.225
12000	0.221	0.218	0.215	0.211	0.208	0.205	0.202	0.199	0.196	0.193
13000	0.190	0.187	0.184	0.181	0.178	0.176	0.173	0.170	0.168	0.165
14000	0.163	0.160	0.158	0.155	0.153	0.151	0.148	0.146	0.144	0.142
15000	0.139	0.137	0.135	0.133	0.131	0.128	0.126	0.125	0.123	0.121
16000	0.119	0.117	0.116	0.114	0.112	0.110	0.108	0.106	0.105	0.104
17000	0.102	0.100	0.099	0.098	0.096	0.095	0.094	0.092	0.090	0.089
18000	0.087	0.086	0.085	0.084	0.082	0.081	0.080	0.079	0.078	0.076
19000	0.075	0.074	0.073	0.072	0.070	0.069	0.068	0.067	0.066	0.065

附表 5　相对湿度B = 50%时的音速 a(y) 表

y 千米	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a米/秒	340.8	337.0	333.2	329.3	325.5	321.6	317.5	315.5	309.5	305.3
y	10	11	12	13	14	15				
a	301.4	299.1	298.3	298.3	298.3	298.3				

附表 6　西亚切阻力定律表 $C_{\overline{x}_0}\left(\frac{V}{a}\right)$

$M=\frac{V}{a}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.7*	0.259	0.261	0.262	0.263	0.265	0.267	0.268	0.271	0.275	0.281
0.8	0.284	0.289	0.294	0.301	0.310	0.320	0.333	0.355	0.362	0.378
0.9	0.393	0.410	0.425	0.442	0.456	0.472	0.488	0.504	0.519	0.534
1.0	0.546	0.557	0.567	0.577	0.587	0.597	0.608	0.616	0.624	0.631
1.1	0.639	0.646	0.653	0.659	0.664	0.668	0.673	0.677	0.682	0.686
1.2	0.690	0.694	0.698	0.701	0.704	0.707	0.709	0.712	0.714	0.717
1.3	0.719	0.720	0.722	0.723	0.725	0.726	0.727	0.728	0.729	0.730
1.4	0.731	0.732	0.733	0.733	0.734	0.735	0.736	0.736	0.737	0.737
1.5	0.737	0.737	0.737	0.737	0.736	0.736	0.736	0.736	0.735	0.735
1.6	0.735	0.734	0.733	0.733	0.732	0.732	0.731	0.730	0.729	0.729
1.7	0.728	0.727	0.726	0.725	0.725	0.724	0.723	0.722	0.721	0.720
1.8	0.719	0.718	0.717	0.716	0.715	0.714	0.713	0.712	0.711	0.710
1.9	0.709	0.707	0.706	0.705	0.703	0.702	0.701	0.700	0.699	0.698
2.0	0.697	0.695	0.694	0.692	0.691	0.689	0.688	0.687	0.685	0.684
2	0.697	0.683	0.667	0.655	0.640	0.627	0.613	0.597	0.588	0.574
3	0.561	0.548	0.539	0.525	0.514	0.503	0.493	0.483	0.474	0.465
4	0.457	0.448	0.440	0.433	0.426	0.420				

* $M<0.7$ 以前，全是 0.259

附表 7　西亚切定律阻力函数 $G(V_\tau)=G\left(V\sqrt{\frac{\tau_{ON}}{\tau}}\right)$表

V_τ 米/秒	00	10	20	30	40	50	60	70	90	90
200	0.0246	0.0259	0.0273	0.0287	0.0302	0.0319	0.0337	0.0360	0.0392	0.0440
300	0.0515	0.0604	0.0696	0.0788	0.0874	0.0956	0.1031	0.1102	0.1168	0.1230
400	0.1288	0.1344	0.1395	0.1445	0.1493	0.1539	0.1582	0.1624	0.1665	0.1704
500	0.1742	0.1778	0.1813	0.1847	0.1879	0.1911	0.1942	0.1971	0.1999	0.2027
600	0.2053	0.2079	0.2105	0.2130	0.2153	0.2176	0.2198	0.2219	0.2240	0.2260
700	0.2280	0.2299	0.2318	0.2336	0.2352	0.2369	0.2386	0.2402	0.2419	0.2435
800	0.2450	0.2465	0.2479	0.2493	0.2507	0.2521	0.2534	0.2547	0.2560	0.2572
900	0.2584	0.2596	0.2607	0.2618	0.2629	0.2640	0.2650	0.2660	0.2670	0.2680
1000	0.2690	0.2700	0.2709	0.2719	0.2728	0.2736	0.2744	0.2752	0.2760	0.2766
1100	0.2776	0.2783	0.2791	0.2798	0.2805	0.2812	0.2820	0.2827	0.2834	0.2842
1200	0.2849	0.2855	0.2862	0.2868	0.2874	0.2880	0.2887	0.2893	0.2899	0.2906
1300	0.2912	0.2917	0.2922	0.2928	0.2933	0.2938	0.2943	0.2948	0.2954	0.2959
1400	0.2964	0.2969	0.2973	0.2978	0.2982	0.2987	0.2992	0.2996	0.3001	0.3005

附表 8　西亚切定律西亚切主函数差值 $\delta D(V)$表

$\bar{V}$ 米/秒	00	10	20	30	40	50	60	70	80	90
200	406	386	366	349	332	315	297	278	255	225
300	193	165	144	128	114	106	97.3	90.5	85.8	81.6
400	77.6	74.5	71.4	69.2	67.0	65.2	63.5	61.3	60.2	59.6
500	58.0	57.0	56.1	55.1	54.2	53.2	52.3	51.4	50.6	49.8
600	48.9	48.2	47.5	46.9	46.2	45.7	45.2	44.7	44.3	44.0
700	43.8	43.6	43.3	42.8	42.5	42.2	41.9	41.7	41.4	41.1
800	40.9	40.7	40.5	40.3	40.1	39.9	39.7	39.5	39.3	39.1
900	38.9	38.7	38.5	38.3	38.2	38.1	37.9	37.7	37.6	37.5
1000	37.4	37.3	37.2	37.0	36.9	36.8	36.7	36.6	36.4	36.3
1100	36.2	36.0	35.9	35.8	35.7	35.7	35.6	35.5	35.4	35.3
1200	35.2	35.1	35.0	34.9	34.8	34.7	34.6	34.5	34.4	34.4

附表 9　饱和蒸气（相对湿度B＝100%）压强 e(t°) 表【毫米汞高】

温度 t℃	压强 e	t℃	e	t℃	e	t℃	e	t℃	e	t℃	e
−20°	0.91	−10°	2.08	0°	4.60	10°	9.17	20°	17.36	30°	31.55
−19	1.00	− 9	2.26	1	4.94	11	9.79	21	18.50	31	33.41
−18	1.08	− 8	2.46	2	5.30	12	10.46	22	19.66	32	35.36
−17	1.18	− 7	2.67	3	5.69	13	11.16	23	20.91	33	37.41
−16	1.28	− 6	2.89	4	6.10	14	11.91	24	22.18	34	39.57
−15	1.39	− 5	3.13	5	6.53	15	12.70	25	23.55	35	41.83
−14	1.50	− 4	3.39	6	7.00	16	13.54	26	24.99	36	44.20
−13	1.63	− 3	3.66	7	7.49	17	14.42	27	26.51	37	46.69
−12	1.76	− 2	3.92	8	8.02	18	15.36	28	28.10	38	49.30
−11	1.92	− 1	4.27	9	8.57	19	16.35	29	29.78	39	52.04

附表 10　火箭弹弹道函数L(V)表　$L(V)=\frac{1}{V^3}\int_0^V F(V)dV$

表中数值已乘 10^5（西亚切定律）

V 米/秒	00	10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	4.03	4.03	4.03	4.03	4.03	4.04	4.04	4.05	4.05	4.05
200	4.06	4.07	4.07	4.08	4.10	4.11	4.13	4.16	4.20	4.26
300	4.37	4.53	4.75	5.00	5.28	5.58	5.88	6.19	6.49	6.78
400	7.06	7.33	7.59	7.83	8.06	8.27	8.47	8.66	8.84	9.00
500	9.16	9.30	9.43	9.55	9.66	9.77	9.86	9.95	10.03	10.10
600	10.17	10.23	10.28	10.33	10.37	10.41	10.44	10.47	10.49	10.51
700	10.52	10.54	10.55	10.55	10.56	10.56	10.55	10.54	10.54	10.53
800	10.52	10.51	10.50	10.48	10.46	10.44	10.42	10.40	10.38	10.36
900	10.32	10.30	10.27	10.25	10.22	10.19	10.16	10.13	10.10	10.07

附表 11　火箭弹弹道函数　$\varphi\left(\frac{V}{V_1}\right)$**表**

$$\varphi\left(\frac{V}{V_1}\right)=\varphi(u)=\frac{1}{(u-1)^2}\left[u^2\cdot\left(\ln u-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]$$

$u=V/V_1$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1.0	1.000	1.032	1.063	1.093	1.122	1.150	1.176	1.201	1.226	1.250
2.0	1.273	1.295	1.317	1.338	1.358	1.378	1.398	1.417	1.436	1.454
3.0	1.472	1.489	1.506	1.523	1.539	1.555	1.571	1.588	1.602	1.617
4.0	1.631	1.645	1.659	1.673	1.687	1.701	1.714	1.727	1.740	1.753
5.0	1.765	1.777	1.789	1.801	1.813	1.825	1.837	1.848	1.859	1.870
6.0	1.881	1.892	1.902	1.912	1.922	1.932	1.942	1.952	1.962	1.972
7.0	1.982	1.992	2.002	2.011	2.020	2.029	2.038	2.047	2.056	2.065
8.0	2.073	2.082	2.090	2.099	2.107	2.116	2.124	2.132	2.140	2.148
9.0	2.156	2.164	2.172	2.180	2.187	2.195	2.202	2.210	2.217	2.225
10.0	2.232									

附表 12　对数函数 $\ln\left(\frac{V}{V_1}\right)$表

V/V_1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1.0	0.000	0.0953	0.1823	0.2624	0.3365	0.4055	0.4700	0.5306	0.5878	0.6419
2.0	0.6931	0.7419	0.7885	0.8329	0.8755	0.9163	0.9555	0.9933	1.0296	1.0647
3.0	1.0986	1.1314	1.1632	1.1939	1.2238	1.2528	1.2809	1.3083	1.3350	1.3610
4.0	1.3863	1.4110	1.4351	1.4586	1.4816	1.504	1.526	1.548	1.569	1.589
5.0	1.609	1.630	1.649	1.668	1.686	1.705	1.723	1.741	1.758	1.775
6.0	1.792	1.808	1.825	1.841	1.856	1.872	1.887	1.902	1.917	1.932
7.0	1.946	1.960	1.974	1.988	2.002	2.015	2.028	2.041	2.054	2.067
8.0	2.079	2.092	2.104	2.116	2.128	2.140	2.152	2.163	2.175	2.186
9.0	2.197	2.208	2.219	2.230	2.241	2.251	2.262	2.272	2.284	2.293
10.0	2.302									

附表 13　西亚切定律弹道函数（g 函数）简表

g_u 表

C_{BD} \ V_{01}	800	850	900	950	1000	1050	1100	1150	1200	1250
600	0.825	0.829	0.834	0.839	0.843	0.848	0.852	0.857	0.861	0.865
1200	0.672	0.678	0.685	0.692	0.699	0.706	0.714	0.721	0.728	0.735
1800	0.545	0.550	0.556	0.563	0.571	0.580	0.589	0.598	0.606	0.615
2400	0.452	0.452	0.454	0.458	0.464	0.471	0.478	0.487	0.496	0.505
3000	0.391	0.384	0.380	0.379	0.381	0.384	0.390	0.396	0.403	0.412
3600	0.353	0.342	0.334	0.328	0.324	0.322	0.323	0.325	0.329	0.334
4400	0.317	0.306	0.297	0.289	0.281	0.276	0.271	0.268	0.266	0.265
5200	0.286	0.277	0.268	0.260	0.253	0.246	0.241	0.236	0.231	0.228
6000	0.259	0.250	0.242	0.235	0.229	0.223	0.218	0.213	0.209	0.205
8000	0.203	0.196	0.1898	0.1840	0.1788	0.1742	0.1700	0.1662	0.1627	0.1596
10000	0.1594	0.1538	0.1488	0.1443	0.1402	0.1366	0.1332	0.1302	0.1275	0.1250

g_t 表

600	1.101	1.097	1.094	1.092	1.089	1.086	1.083	1.080	1.077	1.075
1200	1.223	1.216	1.209	1.202	1.196	1.189	1.182	1.176	1.170	1.166
1800	1.368	1.358	1.347	1.336	1.325	1.314	1.303	1.292	1.281	1.271
2400	1.532	1.522	1.510	1.596	1.481	1.464	1.448	1.432	1.416	1.401
3000	1.704	1.700	1.692	1.679	1.662	1.643	1.623	1.602	1.581	1.560
3600	1.870	1.879	1.880	1.874	1.862	1.845	1.824	1.802	1.777	1.751
4400	2.07	2.10	2.12	2.13	2.13	2.12	2.11	2.09	2.07	2.05
5200	2.27	2.31	2.34	2.36	2.38	2.39	2.39	2.38	2.37	2.36
6000	2.45	2.50	2.55	2.59	2.61	2.63	2.65	2.66	2.67	2.67
8000	2.93	3.01	3.08	3.14	3.20	3.25	3.29	3.33	3.36	3.38
10000	3.46	3.56	3.66	3.75	3.83	3.90	3.97	4.03	4.08	4.13

附表 13（续）

g_n 表

C_{kp} \ V_{01}	800	850	900	950	1000	1050	1100	1150	1200	1250
600	1.138	1.133	1.128	1.124	1.119	1.115	1.111	1.108	1.105	1.102
1200	1.314	1.303	1.292	1.281	1.271	1.262	1.253	1.244	1.236	1.228
1800	1.541	1.522	1.502	1.484	1.466	1.449	1.433	1.417	1.401	1.386
2400	1.828	1.804	1.777	1.749	1.721	1.693	1.665	1.638	1.612	1.587
3000	2.18	2.16	2.13	2.09	2.05	2.01	1.969	1.928	1.889	1.851
3600	2.57	2.57	2.55	2.51	2.47	2.42	2.36	2.31	2.25	2.20
4400	3.15	3.18	3.19	3.18	3.15	3.11	3.05	2.99	2.91	2.83
5200	3.74	3.83	3.89	3.92	3.93	3.91	3.88	3.82	3.75	3.67
6000	4.36	4.50	4.62	4.70	4.76	4.79	4.79	4.77	4.73	4.68
8000	6.09	6.38	6.65	6.89	7.09	7.26	7.41	7.52	7.60	7.65
10000	8.19	8.66	9.11	9.52	9.91	10.26	10.58	10.86	11.10	11.32

g_p 表

600	1.214	1.206	1.199	1.192	1.186	1.180	1.174	1.169	1.164	1.158
1200	1.513	1.495	1.476	1.458	1.442	1.426	1.411	1.396	1.381	1.367
1800	1.925	1.896	1.863	1.831	1.799	1.767	1.737	1.707	1.678	1.651
2400	2.47	2.44	2.40	2.35	2.30	2.25	2.20	2.14	2.09	2.05
3000	3.12	3.12	3.10	3.05	2.99	2.92	2.84	2.76	2.68	2.60
3600	3.82	3.88	3.91	3.90	3.85	3.78	3.70	3.61	3.50	3.39
4400	4.76	4.92	5.05	5.13	5.18	5.19	5.16	5.09	4.99	4.87
5200	5.72	5.98	6.21	6.40	6.55	6.66	6.73	6.75	6.75	6.70
6000	6.75	7.11	7.44	7.73	7.98	8.20	8.38	8.52	8.61	8.67
8000	9.84	10.47	11.07	11.64	12.16	12.65	13.11	13.53	13.91	14.24
10000	14.09	15.06	16.01	16.92	17.79	18.62	19.41	20.20	20.90	21.50

g_w 表

600	1.288	1.279	1.269	1.261	1.253	1.245	1.237	1.229	1.221	1.214
1200	1.710	1.686	1.661	1.637	1.613	1.591	1.570	1.548	1.527	1.507
1800	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13	2.09	2.04	1.998	1.957	1.917
2400	3.10	3.07	3.02	2.95	2.88	2.80	2.72	2.65	2.58	2.50
3000	4.06	4.08	4.07	4.01	3.93	3.82	3.71	3.60	3.48	3.36
3600	5.05	5.20	5.27	5.28	5.24	5.16	5.04	4.90	4.75	4.58
4400	6.37	6.66	6.90	7.08	7.20	7.26	7.27	7.21	7.09	6.91
5200	7.70	8.13	8.53	8.88	9.18	9.42	9.59	9.69	9.74	9.72
6000	9.13	9.71	10.25	10.75	11.21	11.61	11.96	12.26	12.48	12.66
8000	13.60	14.56	15.49	16.39	17.23	18.04	18.64	19.53	20.22	20.83
10000	20.00	21.46	22.91	24.52	25.67	26.26	28.54	29.54	30.70	31.68

附表 14　西亚切定律 K_{VPJ} 函数简表

C_{HD} \ V_{01}	800	850	900	950	1000	1050	1100	1150	1200	1250
600	0.122	0.126	0.130	0.133	0.136	0.138	0.140	0.142	0.144	0.146
1200	0.121	0.126	0.130	0.133	0.136	0.139	0.142	0.144	0.146	0.148
1800	0.119	0.124	0.129	0.133	0.136	0.139	0.142	0.144	0.146	0.148
2400	0.116	0.121	0.126	0.131	0.135	0.139	0.142	0.145	0.147	0.149
3000	0.110	0.117	0.123	0.128	0.133	0.137	0.141	0.144	0.147	0.150
3600	0.103	0.110	0.117	0.123	0.129	0.134	0.138	0.142	0.146	0.149
4400	0.0941	0.101	0.108	0.115	0.121	0.126	0.131	0.136	0.141	0.145
5200	0.0868	0.0925	0.0991	0.105	0.111	0.117	0.123	0.128	0.133	0.138
6000	0.0789	0.0851	0.0912	0.0971	0.103	0.109	0.115	0.120	0.125	0.130
8000	0.0659	0.0710	0.0760	0.0810	0.0859	0.0908	0.0957	0.101	0.105	0.110
10000	0.0569	0.0612	0.0655	0.0697	0.0739	0.0781	0.0823	0.0865	0.0907	0.0948

附表 15　航空炸弹1969年阻力定律 $C_{x0}(M)$ 表

M数	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.3	0.589	0.589	0.589	0.589	0.589	0.589	0.589	0.589	0.589	0.590
0.4	0.590	0.590	0.590	0.591	0.591	0.591	0.592	0.592	0.593	0.593
0.5	0.594	0.594	0.595	0.596	0.596	0.597	0.598	0.599	0.600	0.601
0.6	0.603	0.605	0.607	0.609	0.612	0.615	0.618	0.621	0.625	0.629
0.7	0.633	0.637	0.640	0.647	0.652	0.658	0.664	0.670	0.676	0.682
0.8	0.689	0.695	0.702	0.709	0.717	0.724	0.732	0.741	0.750	0.759
0.9	0.770	0.782	0.795	0.811	0.829	0.850	0.874	0.899	0.924	0.954
1.0	0.984	1.013	1.043	1.073	1.100	1.126	1.149	1.171	1.191	1.207
1.1	1.221	1.233	1.244	1.253	1.262	1.269	1.276	1.283	1.289	1.295
1.2	1.301	1.307	1.312	1.317	1.322	1.327	1.332	1.337	1.341	1.340
1.3	1.350	1.354	1.358	1.362	1.366	1.370	1.373	1.377	1.381	1.384
1.4	1.388	1.391	1.394	1.397	1.400	1.403	1.406	1.409	1.412	1.415
1.5	1.417	1.420	1.422	1.425	1.427	1.429	1.431	1.434	1.436	1.438
1.6	1.440	1.442	1.444	1.446	1.448	1.450	1.452	1.453	1.455	1.456
1.7	1.457	1.459	1.460	1.460	1.461	1.462	1.462	1.463	1.463	1.463
1.8	1.464	1.464	1.464	1.463	1.463	1.463	1.462	1.462	1.461	1.460
1.9	1.459	1.458	1.458	1.458	1.457	1.456	1.456	1.455	1.455	1.454
2.0	1.453	1.452	1.451	1.450	1.450	1.449	1.448	1.447	1.446	1.444
2.1	1.442	1.442	1.441	1.440	1.439	1.438	1.437	1.436	1.435	1.434
2.2	1.433	1.432	1.431	1.430	1.429	1.428	1.426	1.425	1.424	1.423
2.3	1.422	1.421	1.420	1.419	1.418	1.417	1.416	1.414	1.413	1.411
2.4	1.410	1.409	1.408	1.407	1.406	1.404	1.403	1.402	1.401	1.400
2.5	1.400	1.399	1.398							

附表 16　虚拟温度 $\tau(y)$ 表　(°K)

y米	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	288.9	288.3	287.6	287.0	286.4	285.7	285.1	284.5	283.9	283.2
1000	282.6	282.0	281.3	280.7	280.1	279.4	278.8	278.2	277.5	276.9
2000	276.2	275.6	274.9	274.3	273.7	273.0	272.4	271.8	271.2	270.5
3000	269.9	269.3	268.8	268.0	267.4	266.7	266.1	265.5	264.9	264.2
4000	263.6	263.0	262.3	261.7	261.1	260.4	259.8	259.1	258.5	257.9
5000	257.3	256.6	256.0	255.4	254.7	254.1	253.5	252.9	252.2	251.6
6000	250.9	250.3	249.7	249.0	248.4	247.7	247.1	246.1	245.8	245.2
7000	244.6	243.9	243.3	242.7	242.1	241.4	240.8	240.1	239.5	238.9
8000	238.3	237.6	237.0	236.4	235.8	235.1	234.5	233.9	233.2	232.6
9000	232.0	231.3	230.7	230.0	229.4	228.8	228.2	227.6	227.1	226.6
10000	226.1	225.6	225.2	224.8	224.4	224.0	223.7	223.4	223.1	222.9
11000	222.7	222.5	222.3	222.1	222.0	221.8	221.7	221.6	221.6	221.5
12000	221.5	221.5	221.5	221.5						

附表 17　重力加速度 g(y)表　(米/秒^2)

y米	0	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
0	9.800	9.797	9.794	9.791	9.788	9.785	9.781	9.778	9.775	9.772
10×10^3	9.769	9.766	9.763	9.760	9.757	9.754	9.751	9.748	9.745	9.742
20×10^3	9.739	9.736	9.733	9.729	9.726	9.723	9.720	9.717	9.714	9.711
30×10^3	9.708	9.705	9.702	9.699	9.696	9.693	9.690	9.687	9.684	9.681
40×10^3	9.678	9.674	9.671	9.668	9.665	9.662	9.659	9.656	9.653	9.650

附表 18　海平面上各纬度处的重力加速度 g(λ°)表

λ°	0(赤道)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
g米/秒^2	9.7805	9.7820	9.7865	9.7934	9.8018	9.8108	9.8192	9.8251	9.8306	9.8322

参　考　文　献

[1]　《外弹道学》浦　发编　国防工业出版社　1980年7月

[2]　《航空外弹道学讲义》陆松鹤编　军事工程学院印　1963年11月

[3]　《火箭外弹道学》徐明友编　国防工业出版社　1980年6月

[4] 《外弹道学》Д.А.ВЕНТЦЕЛЬ著 张述祖译 军事工程学院印 1954年10月
[5] 《外弹道学》浦 发 张 枌编 张述祖校 军事工程学院印 1956年3月
[6] 《航空炸弹弹道表资料汇集》 空军司令部编 1970年
[7] 《计算方法》聂铁军编 国防工业出版社 1982年7月
[8] 《空中射击弹道函数表及弹道表》李邦超 姜彩云 张滋烈编 国防工业出版社 1976年
[9] 《航空外弹道学讲义》 空军工程学院 1981年8月
[10] 《轰炸弹道计算的FORTRAN程序设计》王茂兴 1980年9月

[4] 《外弹道学》Д.А.ВЕНТЦЕЛЬ著 张述祖译 军事工程学院印 1954年10月
[5] 《外弹道学》浦 发 张 枌编 张述祖校 军事工程学院印 1956年3月
[6] 《航空炸弹弹道表资料汇集》 空军司令部编 1970年
[7] 《计算方法》聂铁军编 国防工业出版社 1982年7月
[8] 《空中射击弹道函数表及弹道表》李邦超 姜彩云 张滋烈编 国防工业出版社 1976年
[9] 《航空外弹道学讲义》 空军工程学院 1981年8月
[10] 《轰炸弹道计算的FORTRAN程序设计》王茂兴 1980年9月